

Unidad IV

Líneas de Espera

...

Ubicación dentro del Programa

UNIDAD III: LÍNEAS DE ESPERA

1. Modelos de líneas de espera. Estructura del sistema de línea de espera.
2. Modelo de línea de espera de un solo canal.
3. Modelo de línea de espera con múltiples canales.

Bibliografía Básica

ANDERSON, DAVID R., SWEENEY, DENNIS J. & WILLIAMS, THOMAS A.

Métodos cuantitativos para los negocios.

Capítulo 14.

Líneas de Espera

Las LÍNEAS DE ESPERA, FILAS DE ESPERA o COLAS, son realidades cotidianas:

- ✚ Personas esperando para realizar sus transacciones ante un cajero en un banco,
- ✚ Estudiantes esperando para obtener copias en la fotocopidora,
- ✚ Vehículos esperando pagar ante una estación de peaje o continuar su camino ante un semáforo en rojo,
- ✚ Máquinas dañadas a la espera de ser rehabilitadas,
- ✚ ...

Líneas de Espera

LÍNEAS DE ESPERA MÁS COMUNES		
LUGAR	ESPERAN ...	SERVICIO
Supermercado	Compradores	Pago en cajas
Peaje	Vehículos	Pago de peaje
Consultorio	Pacientes	Consulta
Sistema de Cómputo	Programas a ser corridos	Proceso de datos
Compañía de teléfonos	Llamadas	Efectuar comunicación
Banco	Clientes	Depósitos y Cobros
Mantenimiento	Máquinas dañadas	Reparación
Muelle	Barcos	Carga y descarga

Líneas de Espera

Las Líneas de Espera se forman debido a un **desequilibrio temporal** entre la **demanda del servicio** y la **capacidad del sistema** para suministrar ese servicio.

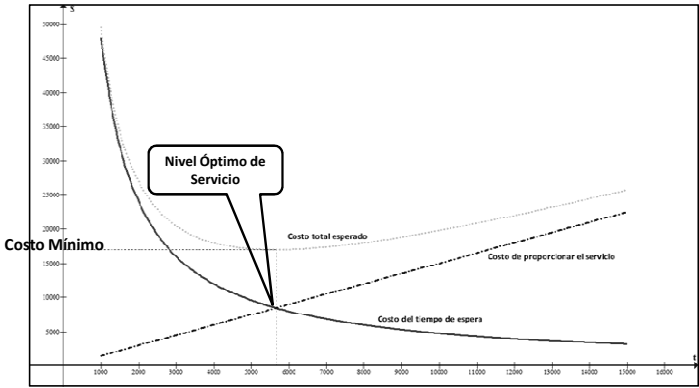


Líneas de Espera

- Los Administradores desean que las líneas de espera sean lo suficientemente cortas con la finalidad de que los clientes no se irriten e incluso se retiren sin llegar a utilizar el servicio o lo usen pero no retornen más.
- Sin embargo los Administradores también contemplan tener una longitud de línea de espera razonable, que sea balanceada, para obtener ahorros significativos en el **COSTO** del **SERVICIO**.
- Los Administradores reconocen que debe haber un equilibrio entre el **COSTO** de proporcionar buen **SERVICIO** y el **COSTO** del tiempo de **ESPERA** del cliente que debe ser atendido.

Líneas de Espera

Equilibrio entre Costos de Espera y Costos de Servicio



Líneas de Espera

Objetivo: determinar las medidas de desempeño de la línea:

1. Probabilidad que no haya clientes en el Sistema.
2. Cantidad promedio de clientes en la Línea de Espera.
3. Cantidad promedio de clientes en el Sistema.
4. Tiempo promedio que permanece un cliente en la Línea de Espera.
5. Tiempo promedio que permanece un cliente en el Sistema.
6. Probabilidad que tiene un cliente que llega de esperar por el servicio.

1. Modelos de líneas de espera. Estructura del sistema de línea de espera

Estructura de las Líneas de Espera

- ✓ Distribución de Llegadas.
- ✓ Disciplina de la Línea de Espera.
- ✓ Distribución del Tiempo de Servicio.
- ✓ Cantidad de Canales
- ✓ Período Transitorio y Estado Estable.

Estructura de las Líneas de Espera

Distribución de Llegadas:

Distribución de Probabilidad de Poisson

- ✓ Cada Llegada es aleatoria e
- ✓ independiente de otras llegadas.

Estructura de las Líneas de Espera

Disciplina de la Línea de Espera:

- ✓ FCFS (first come – first served).
- ✓ LCFS (last come – first served).
- ✓ SIRO (service in random order).

Estructura de las Líneas de Espera

Distribución del Tiempo de Servicio:

Distribución de Probabilidad Exponencial

- ✓ Cada llegada es aleatoria e
- ✓ independiente de otras llegadas.

Modelos de Líneas de Espera: Estructura

Cantidad de Canales:

- ✓ Un solo Canal.
- ✓ Canales múltiples.

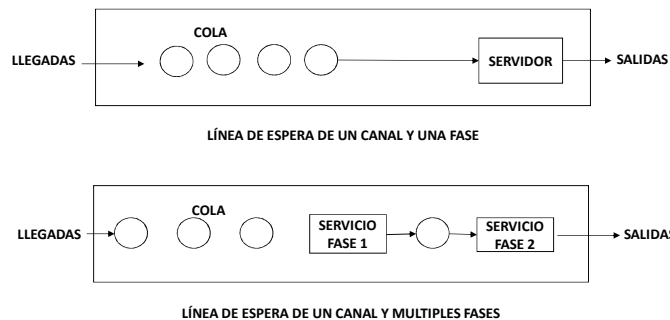
Períodos:

- ✓ Transitorio.
- ✓ Operación de Estado Estable o Normal.

2. Modelo de línea de espera de un solo canal

...

Líneas de Espera de un solo Canal



Líneas de Espera de un solo Canal

Según Notación de Kendall:

$M / M / 1$

- Llegadas con Distribución de Poisson.
- Disciplina FCFS.
- Tiempo de Servicio con Distribución Exponencial.
- La Tasa Media de Servicio es mayor que la Tasa Media de Llegada ($\mu > \lambda$).

Líneas de Espera de un solo Canal

- ✓ Probabilidad que no haya clientes en el sistema:

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

- ✓ Cantidad promedio de clientes en la línea de espera:

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$$

- ✓ Cantidad promedio de clientes en el Sistema:

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

Líneas de Espera de un solo Canal

- ✓ Tiempo promedio que permanece un cliente en la línea de espera:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

- ✓ Tiempo promedio que permanece un cliente en el sistema:

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

Líneas de Espera de un solo Canal

- ✓ Probabilidad de que un cliente que llega tenga que esperar por el servicio (factor de utilización):

$$P_q = \frac{\lambda}{\mu}$$

- ✓ Probabilidad de n clientes en el sistema:

$$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n P_0$$

Líneas de Espera de un solo Canal

Ejemplo:

M / M / 1

- $\lambda = 0,75$ clientes / minuto
- $\mu = 1$ cliente / minuto

Describir su Estructura

Líneas de Espera de un solo Canal

Según Notación de Kendall:

M / G / 1

- Llegadas con Distribución de Poisson.
- Disciplina FCFS.
- Tiempo de Servicio con Distribución General o no especificada (σ).
- La Tasa Media de Servicio es mayor que la Tasa Media de Llegada ($\mu > \lambda$).

Líneas de Espera de un solo Canal

- ✓ Probabilidad que no haya clientes en el sistema:

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

- ✓ Probabilidad de que un cliente que llega tenga que esperar por el servicio (factor de utilización):

$$P_w = \frac{\lambda}{\mu}$$

Líneas de Espera de un solo Canal

- ✓ Cantidad promedio de clientes en la línea de espera:

$$L_q = \frac{\lambda^2 \sigma^2 + (\lambda / \mu)^2}{2(1 - \lambda / \mu)}$$

- ✓ Cantidad promedio de clientes en el Sistema:

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

Líneas de Espera de un solo Canal

- ✓ Tiempo promedio que permanece un cliente en la línea de espera:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

- ✓ Tiempo promedio que pasa un cliente en el sistema:

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

Líneas de Espera de un solo Canal

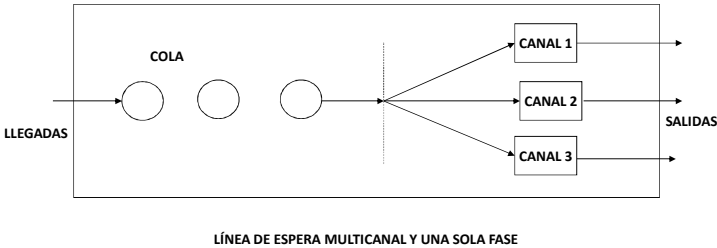
Análisis Económico: $TC = c_w L + c_s k$

- ✓ TC: costo total.
- ✓ c_w : costo de esperar por unidad de tiempo para cada cliente.
- ✓ L: cantidad promedio de clientes en el sistema.
- ✓ c_s : costo del servicio por unidad de tiempo para cada canal.
- ✓ k: cantidad de canales.

3. Modelo de línea de espera con múltiples canales

...

Líneas de Espera Multicanal



Repaso de Estadística

...

REPASO DE ESTADÍSTICA

Distribución de Poisson:

$$P(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \text{ para } x = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$$

- **P(x):** Probabilidad de x arribos
- **x:** número de arribos por unidad de tiempo
- **λ:** tasa media de llegada
- **e = 2,71828...**

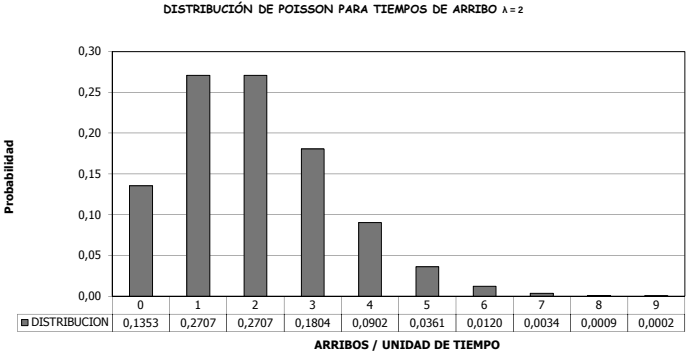
REPASO DE ESTADÍSTICA

Distribución de Poisson:

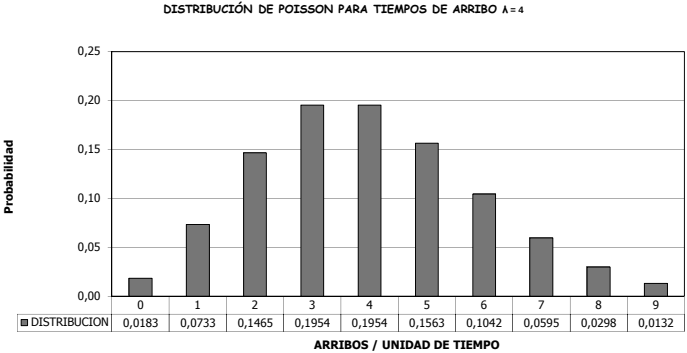
➤ λ = 2 clientes/hora

$$P(x) = \frac{2^x e^{-2}}{x!} \left\{ \begin{array}{l} P(0) = 0,1353 \\ P(1) = 0,2707 \\ P(2) = 0,2707 \\ P(\dots) = \dots \end{array} \right.$$

REPASO DE ESTADÍSTICA



REPASO DE ESTADÍSTICA



REPASO DE ESTADÍSTICA

Distribución Exponencial:

$$P(\text{tiempo_servicio} \leq t) = 1 - e^{-\mu t}$$

- **P:** Probabilidad que el servicio sea menor o igual a t
- **μ :** tasa media de servicio
- **e = 2,71828...**

REPASO DE ESTADÍSTICA

Distribución Exponencial:

➤ $\mu = 1$ cliente/minuto

$$P(\text{tiempo_servicio} \leq t) = 1 - e^{-t}$$

$$P(\text{tiempo_servicio} \leq 0,5 \text{ min}) = 1 - e^{-0,5} = 0,3935$$

$$P(\text{tiempo_servicio} \leq 1,0 \text{ min}) = 1 - e^{-1,0} = 0,6321$$

$$P(\text{tiempo_servicio} \leq 2,0 \text{ min}) = 1 - e^{-2,0} = 0,8647$$