

Estructura óptima de capital para flujos de caja finitos

Optimal Capital Structure for Finite Cash Flows

Felipe Mejia-Pelaez

Internexa S.A. P.S.P.

Medellin, Colombia

lmejia@internexa.com.co felipemejiap@gmail.com

Ignacio Vélez-Pareja

Universidad Tecnológica de Bolívar

Cartagena, Colombia

ivelez@unitecnologica.edu.co nachovelez@gmail.com

James W. Kolari

Texas A&M University

j-kolari@tamu.edu

Primera versión: 27-ene-11

Esta versión: 29-abr-11

Resumen

En este trabajo se muestra cómo encontrar la estructura óptima de capital y el valor con un endeudamiento constante y variable período a período, cuando la tasa de descuento para el ahorro de impuestos es K_e , el costo de capital apalancado. Se presentan procedimientos numéricos y expresiones recursivas compactas no circulares para los casos de períodos finitos y perpetuidades, lo que facilita el cálculo y el análisis, incluyendo simulaciones de Montecarlo. Asimismo, se ilustra el procedimiento en hoja de cálculo con Solver como una verificación.

Palabras clave: Estructura óptima de capital, valoración, no circularidad, flujos de caja finitos, perpetuidades, impuestos escudo fiscal, costo del patrimonio

Abstract

This paper shows how to proceed to find the optimal capital structure y value with period-to-period constant y variable leverage, when the discount rate for Escudo fiscal is K_e , the cost of levered equity. Numerical procedures y recursive closed-form non-circular expressions for the finite-period y perpetuity cases are presented, which facilitate any kind of implementation including Montecarlo simulations. In addition, we illustrate the optimizing procedure with Solver for checking purposes.

Keywords

Optimal capital structure, valuation, non-circularity, finite cash flows, perpetuities tax shield, cost of equity

JEL Classification

M21, M40, M46, M41, G12, G31, J33

1. Introducción

Tham, Velez-Pareja y Kolari (2010) derivaron la fórmula para el costo del patrimonio cuando la tasa de descuento para el ahorro de impuestos, AI, es el costo del patrimonio con deuda y demostraron que la fórmula funciona para perpetuidades y flujos de caja finitos. Esta fórmula fue utilizada más adelante por Kolari y Vélez-Pareja, (2010) donde muestran que con este marco, se encuentra una estructura óptima de capital para perpetuidades sin crecimiento.

Este trabajo muestra cómo encontrar el óptimo con flujos de caja finitos en dos casos: con un apalancamiento único y constante y con diferentes palanca para cada período y, además se presenta, una fórmula general para perpetuidades con el crecimiento constante. El documento también contiene simples ejemplos numéricos para ilustrar el procedimiento. Para cada caso se hacen pruebas de consistencia. En ambos casos la tasa de descuento para el ahorro de impuestos es el costo de capital propio apalancado, K_e tal como se propone en Tham, Velez-Pareja, y Kolari (2010) y Kolari y Vélez-Pareja, (2010). La fórmula para K_e que será ampliamente utilizado en este trabajo es

$$K_e = \psi_t = K_u + \frac{(K_u - K_d) \cdot D_{t-1}}{VU_{t-1} - D_{t-1}} \quad (1)$$

En la fórmula anterior ψ_t representa la tasa de descuento del escudo fiscal, AI, K_u corresponde al costo de capital sin deuda, D_{t-1} es igual al nivel de la deuda, y el valor de la empresa sin deuda se denota por VU_{t-1} . Tenga en cuenta que los sub-índices "t" y "t-1" se utilizan para denotar dos períodos sucesivos de tiempo.

2. Caso de períodos finitos y endeudamiento constante

En este caso, el procedimiento maximiza el valor apalancado de la firma, VL, con un endeudamiento constante sujeto a la restricción que su valor debe ser un número entre 0 y 1. Así, el modelo de optimización es

$$\begin{aligned} &\text{Max VL} \\ &\text{Sujeto a} \\ &0 \leq D\% \leq 1 \end{aligned}$$

VL es el valor apalancado de la firma y $D\%$ es el endeudamiento constante. El modelo se construye suponiendo algunas variables de entrada como la tasa de impuestos T, el costo de la deuda, K_d , el costo del capital propio sin deuda, K_u , endeudamiento constante, $D\%$ y el flujo de caja libre, FCL_t . En la Tabla 1, se presentan los valores iniciales

para esas variables, y como se ha dicho, sólo D% es una variable cambiante en el modelo. Otras variables de entrada son constantes (en aras de la claridad de exposición, las variables de entrada se muestran en celdas sombreadas).

Tabla 1. Datos de entrada

Año	1	2	3	4
T	35%	35%	35%	35%
Kd	11,00%	11,00%	11,00%	11,00%
Ku	15,00%	15,00%	15,00%	15,00%
D%	50,0000%			
FCL	17,00	20,00	22,00	25,00

El modelo hace un uso extensivo de las ecuaciones de equilibrio de los flujos de caja y de valor para cualquier período t, planteados por Modigliani y Miller (1958) de la siguiente manera:

$$FCC_t = FCL_t + AI_t = FCD_t + FCA_t \quad (2)$$

Donde FCC es el flujo de caja de capital, FCL es el flujo de caja libre, el AI es el ahorro de impuestos, FCD es el flujo de caja de la deuda y FCA es el flujo de caja del accionista.

$$VL_t = VU_t + V^{AI}_t = P_t + D_t \quad (3)$$

Las ecuaciones (2), y (3), se utilizan para probar la consistencia, ya que su cumplimiento conduce a una correspondencia perfecta entre los diferentes métodos de valoración. Recordemos que todos los métodos de valoración que utilizan los flujos de efectivo tienen que proporcionar la misma respuesta sin errores de redondeo. Con los datos de entrada se calculan resultados intermedios y temporales. Estos son: la deuda D al final del período, el pago de la deuda como $D_t - D_{t-1}$, los intereses calculados según $D_{t-1}Kd_t$, los escudos fiscales AI como $D_{t-1}Kd_tT$, el flujo de caja de la deuda, FCD_t , como la suma del pago de la deuda más los intereses, el flujo de caja del accionista FCA_t se despeja de (2), el valor de la empresa sin deuda VU es el valor presente del FCL a Ku , Ke acuerdo con (1), V^{AI} como el valor presente del AI a la tasa Ke, y el valor sin deuda del patrimonio, como $LV - D - V^{AI}$. Estos valores se muestran en la Tabla 2. El cálculo de los valores con los diferentes métodos a continuación es provisional hasta cuando se resuelve la circularidad y se aplica el procedimiento de optimización.

En este caso encontramos dos etapas, donde aparece la circularidad: una es la definición de la deuda, D, lo cual se necesita para definir FCD, AI y FCA. La segunda etapa es la definición de las tasas de descuento para el FCC y el FCL como en el cálculo del valor con el CPPC (WACC) y FCL. Por lo tanto, lo primero que hay que hacer es habilitar la función de iteración en la hoja de cálculo.

Tabla 2. Método 1: VPA (APV) Valores intermedios y temporales

Año	0	1	2	3	4
VU = VP(FCL a Ku)	58,66	50,46	38,03	21,74	
Deuda D a final de período	30,50	26,04	19,48	11,05	-
Pago de la deuda		4,46	6,56	8,43	11,05
Gastos de intereses		3,36	2,86	2,14	1,22
Escudo fiscal AI		1,17	1,00	0,75	0,43
FCD		7,82	9,43	10,58	12,26
FCA = FCL - FCD + AI		10,36	11,58	12,17	13,16
$Ke = Ku + (Ku - Kd)D/(VU - D)^1$		19,33%	19,27%	19,20%	19,13%
VAI	2,34	1,62	0,93	0,36	
P- VAI= VL-D-VAI	28,16	24,42	18,55	10,69	

Cuando se conoce la deuda, métodos como el Valor Presente Ajustado, VPA, (Adjusted Present Value, APV), no presentan circularidad. En este caso sí ocurre porque la deuda no se conoce y AI depende de la deuda. El primer método es el Valor Presente Ajustado, VPA. En este caso, el valor de los escudos fiscales se calcula con Ke y VL es un valor temporal porque el AI depende de D y D depende de VL.

Tabla 3a. Método 1: APV. Valores temporales.

Año	0	1	2	3	4
FCL		17,00	20,00	22,00	25,00
VP(FCL a Ku)	58,66	50,46	38,03	21,74	
VP(AI a Ke)	2,34	1,62	0,93	0,36	
Valor Total, VL	61,01	52,08	38,96	22,10	
Deuda, D	30,50	26,04	19,48	11,05	

Hay circularidad entre las tablas 2 y 3. Usando Solver se optimiza sobre D% y se obtiene $D\%_{Opt} = 75,2587\%$.

¹ En las tablas que siguen los subíndices que indican tiempo se eliminan para hacer más clara la lectura. Se entiende que el AI, la deuda y los valores del patrimonio (y D% y P%) se sitúan en el período anterior

Figura 1. Cuadro de diálogo de Solver cuando se introduce el modelo optimizador de endeudamiento constante

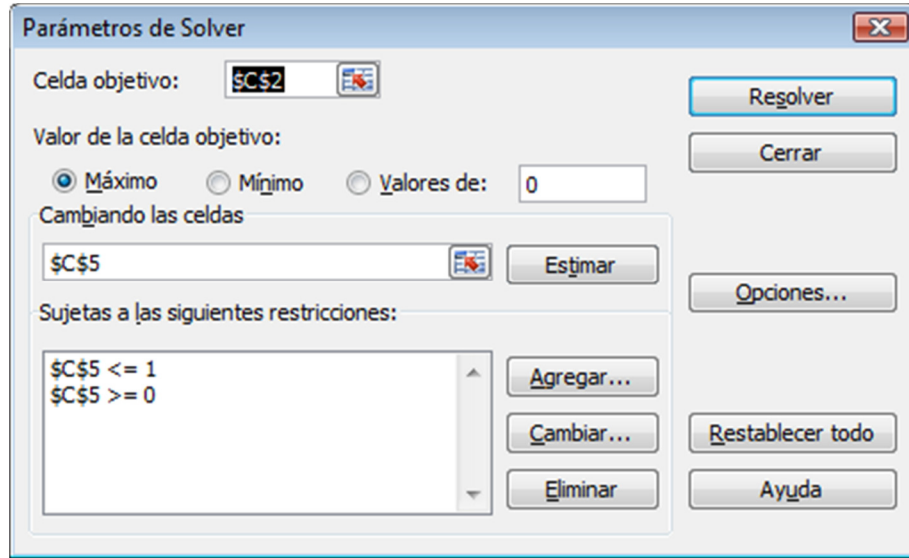


Tabla 3b. Método 1: VPA (APV) Valor óptimo

Año	0	1	2	3	4
FCL		17,00	20,00	22,00	25,00
VP(FCL a Ku)	58,66	50,46	38,03	21,74	
VP(AI a Ke)	3,03	2,16	1,27	0,50	
Valor Total, VL	61,70	52,62	39,31	22,24	
Deuda, D	46,43	39,60	29,58	16,74	

El segundo método calcula el valor del patrimonio con deuda y el VL es la suma del patrimonio y la deuda. Este método se muestra en las tablas 4 y 5.

Tabla 4. Método 2: VP(FCA a Ke). Valores intermedios y temporales

Año	0	1	2	3	4
VU = VP(FCL a Ku)	58,66	50,46	38,03	21,74	
Deuda D al final del período	38,29	31,16	22,27	12,07	-
Pago de la deuda		7,13	8,89	10,20	12,07
Gasto de intereses		4,21	3,43	2,45	1,33
Escudo fiscal AI		1,47	1,20	0,86	0,46
FCD		11,34	12,31	12,65	13,40
FCA = FCL - FCD + AI		7,13	8,89	10,20	12,07
P - VAI= VL-D-VAI	20,37	19,31	15,76	9,67	

Con la deuda temporal, se obtiene un valor temporal en la Tabla 5 a.

Tabla 5a. Método 2: VP(FCA a Ke) Valores temporales

Año	0	1	2	3	4
FCA		7,13	8,89	10,20	12,07
(1) Valor de mercado del patrimonio	38,29	31,16	22,27	12,07	-
(2) Valor de la deuda	38,29	31,16	22,27	12,07	
(3) $K_e = K_u + (K_u - K_d)D/(VU - D)$					
(4) $VL = P + D$	76,58	62,32	44,54	24,14	

Al calcular K_e tenemos

Tabla 5b. Método 2: VP(FCA a Ke). Valor temporal.

Año	0	1	2	3	4
FCA		10,36	11,58	12,17	13,16
(1) Valor de mercado del patrimonio	30,50	26,04	19,48	11,05	-
(2) Value de la deuda al final del período	30,50	26,04	19,48	11,05	
(3) $K_e = K_u + (K_u - K_d).D/(VU - D)$		19,33%	19,27%	19,20%	19,13%
(4) $VL = P + D$	61,01	52,08	38,96	22,10	

Como en el método 1, la Tabla 4 depende de la tabla 5. Cuando se usa Solver para encontrar el $D\%$ óptimo, se encuentra $D\% = 75,2587\%$ y los valores son

Tabla 5c. Método 2: VP(FCA a Ke). Valor óptimo.

Año	0	1	2	3	4
FCA		6,85	7,15	7,04	7,06
(1) Valor de mercado del patrimonio	15,26	13,02	9,72	5,50	-
(2) Valor de la deuda	46,43	39,60	29,58	16,74	
(3) $K_e = K_u + (K_u - K_d).D/(VU - D)$		30,18%	29,58%	29,00%	28,39%
(4) $VL = P + D$	61,70	52,62	39,31	22,24	

Cuando se usa el FCC y el costo promedio ponderado de capital para el FCC, $CPPC^{FCC}$ ($WACC^{FCC}$), se encuentra el valor total de la firma. Tham y Velez-Pareja (2004) present formulación general para el $CPPC^{FCC}$ y usando el FCC y el costo promedio ponderado de capital para el FCC, $CPPC^{FCC}$, se obtiene el valor total de la firma. Tham y Vélez-Pareja (2004) presentan la formulación general de $CPPC^{CCF}$

$$CPPC (WACC)_t^{FCC} = K_{u_t} - (K_{u_t} - \psi_t) \cdot VAI_{t-1} / VL_{t-1} \quad (4a)$$

Cuando ψ , la tasa de descuento para AI es K_e , la ecuación (4a) es

$$CPPC (WACC)_t^{FCC} = K_{u_t} - (K_{u_t} - K_e) \cdot VAI_{t-1} / VL_{t-1} \quad (4b)$$

Valorar el FCC a $CPPC^{FCC}$ es el tercer método para valorar flujos de caja. Esto se muestra en las tablas 6 y 7.

Tabla 6. Método 3: FCC y $WACC^{FCC}$ Valores intermedios y temporales

Año	0	1	2	3	4
$VU = VP(FCL \text{ a } K_u)$	58,66	50,46	38,03	21,74	
Deuda D al final del período	44,23	34,88	24,21	12,75	-
Pago de la deuda		9,35	10,67	11,47	12,75
Gastos de intereses		4,87	3,84	2,66	1,40
Escudo fiscal AI		1,70	1,34	0,93	0,49
FCD		14,22	14,51	14,13	14,15
$FCA = FCL - FCD + AI$		4,49	6,83	8,80	11,34
$K_e = K_u + (K_u - K_d)D_{t-1}/(VU_{t-1} - D_{t-1})$		27,26%	23,95%	22,01%	20,67%
VAI	2,89	1,97	1,10	0,41	
$VU-D$	14,43	15,58	13,82	8,99	

Tabla 7a. Método 3: FCC y $WACC^{FCC}$ Valores temporales. (1)

Año	0	1	2	3	4
Flujo de caja de capital (FCC) = FCD + FCA		18,70	21,34	22,93	25,49
$CPPC^{FCC} = K_u - (K_u - K_e) \cdot VAI/VL$					
$VP(FCC) = VL$	88,47	69,77	48,42	25,49	

La tabla anterior produce un resultado temporal porque hay circularidad entre el $CPPC^{FCC}$ y VL. EL valor temporal VL se calcula con un $CPPC^{FCC}$ de cero. Cuando se introduce el $CPPC^{FCC}$, obtenemos la tabla 7b.

Tabla 7b. Método 3: FCC y $CPPC^{FCC}$ Valores temporales (2)

Año	0	1	2	3	4
Flujo de caja de capital (FCC) = FCD + FCA		18,17	21,00	22,75	25,43
$CPPC^{CCF} = K_u - (K_u - K_e) \cdot V^{AI}/VL$		15,17%	15,13%	15,10%	15,07%
$VP(FCC) = VL$	61,01	52,08	38,96	22,10	

Al optimizar sobre D% se encuentra que $D\% = 75,2587\%$ y los valores son

Tabla 7c. Método 3: FCC y CPPC^{FCC}. Valor óptimo.

Año	0	1	2	3	4
Flujo de caja de capital(FCC) = FCD + FCA		18,79	21,52	23,14	25,64
CPPC ^{FCC} = $K_u - (K_u - K_e) \cdot V^A / V_L$		15,75%	15,60%	15,45%	15,30%
VP(FCC) = VL	61,70	52,62	39,31	22,24	

La formula popular de los textos de finanzas para CPPC (WACC) para el FCL es el cuarto método. Como en el caso del FCC, hay una circularidad porque el cálculo de D% depende de VL.

Tabla 8a. Método 4: Fórmula Tradicional del CPPC (WACC). Valores temporales (1)

Año	0	1	2	3	4
FCL		17,00	20,00	22,00	25,00
(1) V^L a $t=VP(FCL \text{ a CPPC (WACC)})$	84,00	67,00	47,00	25,00	
Contribución de la Deuda al CPPC (WACC)					
(2) D%		50,00%	50,00%	50,00%	50,00%
(3) $K_d(1-T)$		7,15%	7,15%	7,15%	7,15%
(4) Contribución $K_d D\%(1-T)$		3,58%	3,58%	3,58%	3,58%
(4a) Deuda	42,00	33,50	23,50	12,50	
Contribución del patrimonio al CPPC (WACC)					
(5) $P\% = 1 - D\%$		50,00%	50,00%	50,00%	50,00%
(6) $K_e = K_u + (K_u - K_d) \cdot D / (V_U - D)$		25,08%	22,90%	21,47%	20,41%
(7) Contribución $K_e \cdot P\%$ al CPPC (WACC)		12,54%	11,45%	10,73%	10,21%
(8) CPPC (WACC) = $K_e \cdot P\% + K_d \cdot (1-T) \cdot D\%$					

VL no ha sido calculado debido a la circularidad. Cuando calculamos CPPC(WACC)^{FCF}, se encuentra

Tabla 8b. Método 4: Fórmula Tradicional del CPPC (WACC). Valores temporales (2)

Año	0	1	2	3	4
FCL		17,00	20,00	22,00	25,00
(1) V^L a $t=VP(FCL \text{ a CPPC (WACC)})$	61,01	52,08	38,96	22,10	
Contribución of Deuda to CPPC (WACC)					
(2) D%		50,00%	50,00%	50,00%	50,00%
(3) $K_d(1-T)$		7,15%	7,15%	7,15%	7,15%
(4) Contribución $K_d D\%(1-T)$		3,58%	3,58%	3,58%	3,58%
(4a) Deuda	30,50	26,04	19,48	11,05	
Contribución del patrimonio al CPPC (WACC)					
(5) $P\% = 1 - D\%$		50,00%	50,00%	50,00%	50,00%
(6) $K_e = K_u + (K_u - K_d) \cdot D / (V_U - D)$		19,33%	19,27%	19,20%	19,13%
(7) Contribución $K_e \cdot P\%$ to CPPC (WACC)		9,67%	9,63%	9,60%	9,57%
(8) CPPC (WACC) = $K_e \cdot P\% + K_d \cdot (1-T) \cdot D\%$		13,24%	13,21%	13,18%	13,14%

Optimizando sobre D% encontramos D%Opt = 75,2587% y los valores son

Tabla 8c. Método 4: Fórmula Tradicional del CPPC(WACC). Valor óptimo.

Año	0	1	2	3	4
FCL		17,00	20,00	22,00	25,00
(1) V^L a $t=VP(FCL \text{ a CPPC (WACC)})$	61,70	52,62	39,31	22,24	
Contribución de la deuda al CPPC (WACC)					
(2) D%		75,26%	75,26%	75,26%	75,26%
(3) $K_d(1-T)$		7,15%	7,15%	7,15%	7,15%
(4) Contribución $K_d D\%(1-T)$		5,38%	5,38%	5,38%	5,38%
(4a) Deuda	46,43	39,60	29,58	16,74	
Contribución del patrimonio al CPPC (WACC)					
(5) $P\%=1-D\%$		24,74%	24,74%	24,74%	24,74%
(6) $K_e = K_u + (K_u - K_d).D/(VU - D)$		30,18%	29,59%	29,00%	28,39%
(7) Contribución $K_e.P\%$ al CPPC (WACC)		7,47%	7,32%	7,17%	7,02%
(8) CPPC (WACC) = $K_e.P\% + K_d.(1-T).D\%$		12,85%	12,70%	12,56%	12,40%

Tham y Velez-Pareja (2004) presentan la fórmula general del CPPC(WACC)^{FCL} como

$$\text{CPPC (WACC)}_t^{\text{FCL}} = K_{u_t} - A_{I_t}/V_{L_{t-1}} - (K_{u_t} - \psi_t)VAI_{t-1}/V_{L_{t-1}} \quad (5a)$$

Cuando ψ es K_e entonces (5a) es

$$\text{CPPC (WACC)}_t^{\text{FCL}} = K_{u_t} - A_{I_t}/V_{L_{t-1}} - (K_{u_t} - K_{e_t})VAI_{t-1}/V_{L_{t-1}} \quad (5b)$$

Tabla 9a. Método 5: VL con WACC^{FCF} de ec. (5b). Valores temporales. (1)

Año	0	1	2	3	4
FCL		17,00	20,00	22,00	25,00
(1) Valor, VL	84,00	67,00	47,00	25,00	
(2) $WACC^{\text{FCF}} = K_u - A_I/V_L - (K_u - K_e).VAI/V_L$					

En este paso obtenemos

Tabla 9b. Método 5: VL con WACC^{FCF} de ec. (5b). Valores temporales. (2).

Año	0	1	2	3	4
Deuda D al fin del período	42,00	26,04	19,48	11,05	-
Pago de la deuda		15,96	6,56	8,43	11,05
Gastos de intereses		4,62	2,86	2,14	1,22
Escudo fiscal AI		1,62	1,00	0,75	0,43
VP(FCL a K_u)	58,66	50,46	38,03	21,74	
$K_e = K_u + (K_u - K_d)D_{t-1}/(VU_{t-1} - D_{t-1})$		25,08%	19,27%	19,20%	19,13%
VAI	2,59	1,62	0,93	0,36	

Al introducir el CPPC(WACC)^{FCF} con estos datos tenemos

Tabla 10a. Método 5: VL con CPPC(WACC)^{FCL} de ec. (5b) Valores temporales. (3).

Year	0	1	2	3	4
FCL		17,00	20,00	22,00	25,00
(1) Value	61,01	52,08	38,96	22,10	
(2) WACC = $K_u - TS_t/V_{t-1} - (K_u - K_e)VTSt_{-1}/VL_{t-1}$		13,24%	13,21%	13,18%	13,14%

Ahora optimizamos sobre D% y $D\%_{Opt} = 75,2587\%$.

Tabla 10b. Método 5: VL con CPPC(WACC)^{FCL} de ec. (5b). Valor +optimo.

Year	0	1	2	3	4
FCL		17,00	20,00	22,00	25,00
(1) Value	61,70	52,62	39,31	22,24	
(2) WACC = $K_u - TS_t/V_{t-1} - (K_u - K_e)VTSt_{-1}/VL_{t-1}$		12,85%	12,70%	12,56%	12,40%

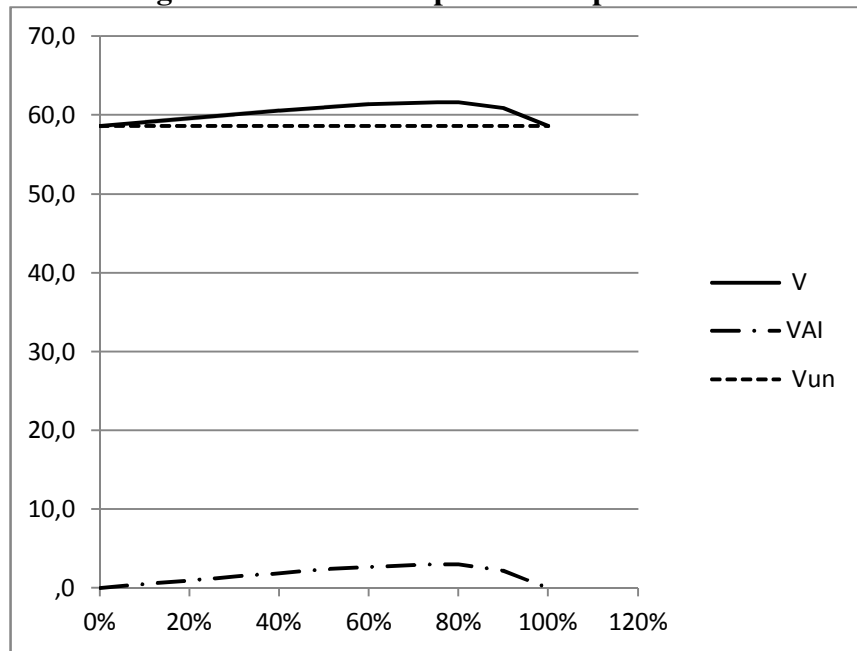
Como puede verse, todos los métodos producen el mismo e idéntico valor. Esto es, que son coherentes. Tenga en cuenta que dada un endeudamiento temporal de 50%, todos los métodos deben producir el mismo valor, es decir, 61,01. Ahora, usando Solver de Excel, la celda objetivo podría ser cualquiera de los valores (en este caso, el carácter temporal, 61,01 obtenidos con la APV) y diseñar Solver para maximizar ese valor, cambiando de la celda donde se escribe D% y sujeto a $0 \leq D\% \leq 1$. La solución de Solver es $D\% = 75,2587\%$. Con este endeudamiento óptimo $D\%_{Opt}$ las tablas anteriores muestran los valores óptimos. Usando tablas de una variable se puede demostrar el comportamiento del valor, el valor sin deuda y VTS. En dicho cuadro se observa el valor máximo en $D\% = 75,2587\%$.

Tabla 11. Comportamiento del VL y VAI dependiendo de D%

D%	VL	VAI	VUn	P-VAI
0%	58,7	-	58,7	58,7
10%	59,2	0,5	58,7	52,7
20%	59,6	1,0	58,7	46,7
30%	60,1	1,4	58,7	40,6
40%	60,6	1,9	58,7	34,4
50%	61,0	2,3	58,7	28,2
60%	61,4	2,7	58,7	21,8
75,2587%	61,7	3,0	58,7	12,2
80%	61,6	3,0	58,7	9,4
90%	60,9	2,2	58,7	3,9
99,98%	58,7	0,0	58,7	0,0

Esto se ilustra en la Figura 2.

Figura 2. Estructura óptima de capital



Cuando el apalancamiento se le permite variar de año a año, el procedimiento es similar, salvo que al momento de optimizar el procedimiento está sujeto a diversas variables (varios% D, uno para cada año).

A continuación, el lector encontrará las tablas para hallar un valor máximo con endeudamiento D% no constante. Obviamente, en este caso no es posible graficar los valores contra el apalancamiento. Las entradas son idénticas a la Tabla 1, excepto que D% es variable del año 1 al año 4. En este caso, el procedimiento maximiza el valor cambiando apalancamiento variable sujeto a la restricción de que el apalancamiento debe ser un valor entre 0 y 1.

El modelo optimizador es

Max VL

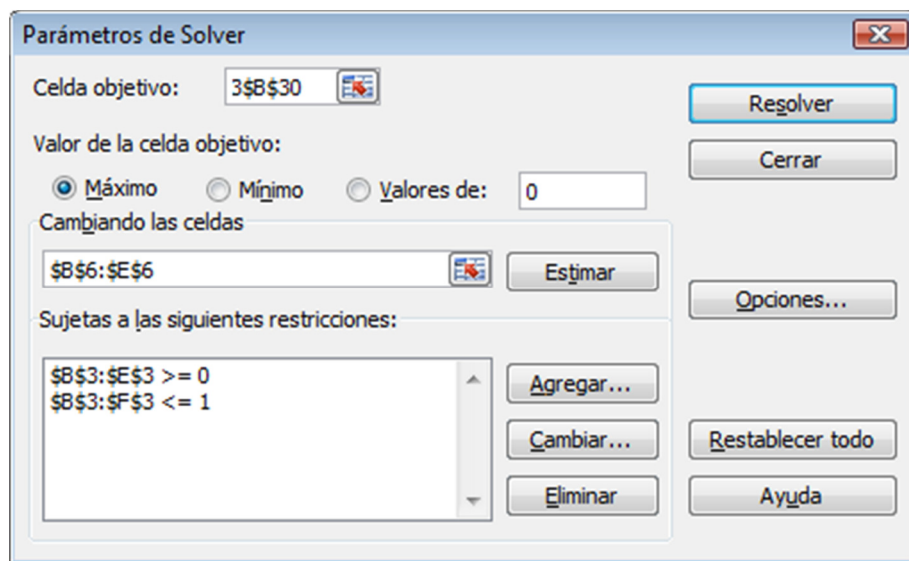
Sujeto a

$0 \leq D\%_t \leq 1$

VL valor total y $D\%_t$ es el endeudamiento período a período.

Usando Solver e introduciendo el modelo matemático indicado arriba, se encuentran los valores óptimos de D%. B30

Figura 3. Cuadro de diálogo de Solver cuando se introduce el modelo



En este caso no se muestran las tablas temporales intermedias. A continuación se muestran las tablas con el resultado final.

Tabla 12. Valores óptimos para la estructura de capital variable D%

Año	0	1	2	3	4
D%	72,983%	75,600%	78,566%	82,324%	
FCL		17,00	20,00	22,00	25,00
Deuda D al final del período	45,04	39,79	30,90	18,32	
Pago de la deuda		5,25	8,90	12,57	18,32
Gastos de intereses		4,95	4,38	3,40	2,02
Escudo fiscal AI		1,73	1,53	1,19	0,71
FCD		10,20	13,28	15,97	20,34
FCA = FCL - FCD + AI		8,53	8,26	7,22	5,37
VP(FCL a Ku)	58,66	50,46	38,03	21,74	
$K_e = K_u + (K_u - K_d) \cdot D / (V_U - D)$		28,22%	29,92%	32,31%	36,45%
VAI	3,05	2,17	1,29	0,52	

A continuación se muestran las tablas de los valores óptimos obtenidos después de utilizar Solver para D% variable. La Tabla 13 representa el valor apalancado, VL calculado con el FCC y CPPC^{FCC}.

Tabla 13. Método 1: FCC y CPPC^{FCC} con D% variable óptimo

Año	0	1	2	3	4
Flujo de caja de capital (FCC)		18,73	21,53	23,19	25,71
$CPPC^{FCC} = K_u - (K_u - K_e) \cdot VAI / VL$		15,65%	15,62%	15,57%	15,50%
VP(FCC) = VL	61,71	52,64	39,32	22,26	

APV es el método más fiable para calcular el valor de una empresa. Se muestra en la Tabla 14.

Tabla 14. Método 2: APV con D% variable y óptimo

Año	0	1	2	3	4
FCL		17,00	20,00	22,00	25,00
Escudo fiscal AI		1,73	1,53	1,19	0,71
VP(FCL a K_u)	58,66	50,46	38,03	21,74	
VP(AI a K_e)	3,05	2,17	1,29	0,52	
Total value VL	61,71	52,64	39,32	22,26	

El método 3 se ilustra en la tabla 15. Muestra la fórmula tradicional de los libros para el $CPPC(WACC)^{FCF}$ y el valor apalancado total.

Tabla 15. Método 3: Fórmula Tradicional del CPPC(WACC). Valor óptimo.

Año	0	1	2	3	4
FCL		17,00	20,00	22,00	25,00
(1) VL a $t = VP(FCL \text{ a } CPPC(WACC))$	61,71	52,64	39,32	22,26	
Contribución de la deuda al CPPC					
(2) $D\%$		72,98%	75,60%	78,57%	82,32%
(3) $K_d.(1-T)$		7,15%	7,15%	7,15%	7,15%
(4) Contribución $K_d D\%.(1-T)$		5,22%	5,41%	5,62%	5,89%
Contribución del patrimonio al CPPC					
(5) $P\% = 1-D\%$					
(6) $K_e = K_u + (K_u - K_d).D/(VU - D)$		27,02%	24,40%	21,43%	17,68%
(7) Contribución $K_e.P\%$ al CPPC		28,22%	29,92%	32,31%	36,45%
(8) $CPPC(WACC) = K_e.P\% + K_d.(1-T).D\%$		7,62%	7,30%	6,93%	6,44%

La siguiente tabla muestra el cálculo del valor de mercado del patrimonio con deuda, con endeudamiento óptimo, $D\%$. La tabla 16 incluye el cálculo de VL usando la ecuación (3).

Tabla 16. Método 4: Valor de mercado del patrimonio, VP(FCA a Ke) D% variable óptimo

Año	0	1	2	3	4
FCA = FCL - FCD + AI		8,47	8,19	7,16	5,32
(1) Valor de mercado del patrimonio	16,67	12,84	8,43	3,93	-
(2) Deuda	45,04	39,79	30,90	18,32	
(3) $Ke = Ku + (Ku - Kd)D/(V^{Un} - D)$		28,22%	29,92%	32,31%	36,45%
(4) VL	61,71	52,64	39,32	22,26	

Finalmente, el método 5 en la Tabla 17 muestra el cálculo del valor con la versión general del CPPC(WACC)^{FCF} cuando Ke es la tasa de descuento del AI.

Tabla 17. Método 5: VL con CPPC(WACC)^{FCF} usando ec. (5b) D% variable y óptimo

Año	0	1	2	3	4
FCL		17,00	20,00	22,00	25,00
(1) VL	61,71	52,64	39,32	22,26	
(2) CPPC (WACC) = $Ku - AI/VL - (Ku - Ke).VAI/VL$		12,84%	12,70%	12,54%	12,33%

Desde el punto de vista de la Teoría de optimización, las restricciones presentes en un problema reducen el espacio de soluciones factibles. Por lo tanto, el espacio es mayor (o, en casos extremadamente especiales, iguales) en el problema de apalancamiento variable que en el de un apalancamiento constante, lo que implica que en casi cualquier caso, el valor optimizado con un apalancamiento variable presentará mejores soluciones que la obtenida en el caso de un endeudamiento constante. Esto se debe al hecho de que el espacio de soluciones factibles en el caso constante es siempre un subconjunto del espacio correspondiente en el caso de apalancamiento variable. Por lo tanto, la diferencia entre la solución con un apalancamiento variable constante influencia es como se esperaba.

Por otro lado, la formulación analítica de endeudamiento constante es casi intratable. Consideramos que en el mundo real lo que sucede es un endeudamiento variable en lugar de un único endeudamiento constante, a pesar de que es una decisión empresarial y que el endeudamiento constante podría finalmente lograrse.

3. Una solución analítica general de apalancamiento variable período a período

A continuación se presentan, las expresiones analíticas compactas para el cálculo de una estructura de capital óptima en dos escenarios diferentes. El primero corresponde al caso período de tiempo finito y la derivación detallada de la fórmula se puede encontrar en el Apéndice A.

El problema a resolver consiste en encontrar un conjunto de niveles óptimos de deuda para cada período tales que, cuando se combinan, maximizan el valor de la empresa apalancada. En principio, este objetivo puede lograrse mediante el tratamiento el nivel de deuda en cada período único de como una variable desconocida, derivando una fórmula para la empresa apalancada de como valor en función de las incógnitas, calculando las derivadas de esa función con respecto al nivel de deuda en cada período, igualando a cero cada uno de las derivadas, construyendo un sistema con las ecuaciones obtenidas, y encontrando una solución del sistema para la deuda óptima en cada período. Sin embargo, este proceso es muy engorroso y poco práctico, debido no sólo a la necesidad de resolver el sistema de ecuaciones, sino también al hecho de que el nivel óptimo de deuda en un plazo arbitrario " t " es una función de los niveles de Deuda en todos los períodos posteriores, Lo que, a su vez, implica que las derivadas más complejas de obtener a medida que aumenta el número de períodos.

Afortunadamente, el último hecho mencionado proporciona una manera de encontrar una solución elegante al problema. En primer lugar, observamos que el nivel óptimo de deuda en el último período " $n-1$ " no depende de la deuda de cualquier período anterior (se supone que el nivel de deuda en el período " n " es cero y el saldo de la deuda en el periodo $n-1$ se pagará con la reducción concomitante en el FCA en el período " n "); en consecuencia, el nivel óptimo de Deuda para ese período se puede encontrar de forma independiente. En consecuencia, este problema de optimización consiste en una única variable de elección y puede ser resuelto de una manera relativamente sencilla. A continuación, y sabiendo que la estructura de capital del período " $n-1$ " ha sido optimizado y en consecuencia, que el valor de la empresa apalancada se ha maximizado en ese período, es posible encontrar que los resultados (el óptimo nivel de deuda para el periodo " $n-1$ " se puede tratar ahora como una constante) el nivel óptimo de deuda para el período " $n-2$ " se trata de una manera análoga. Este procedimiento se puede repetir hasta el período que llega

a cero, obteniendo así el conjunto óptimo de deuda para cada período que maximiza el valor presente de la empresa apalancada.

En consecuencia, el resultado de este análisis (véase el Apéndice A para más detalles, como se mencionó arriba) es una expresión recurrente que se debe aplicar hacia atrás en el tiempo (esto es, a partir del siguiente al último período "n-1" y con los resultados obtenidos para ampliar el proceso hasta el período que llega a cero) además, lo cual hace que, el procedimiento no sufra de problemas de circularidad. La expresión mencionada se muestra a continuación:

$$D_{OPT,t-1} = \frac{VU_{t-1}(1 + Ku_t)}{(1 + Kd_t)} \cdot \left\{ 1 - \sqrt{1 - \frac{(1 + Kd_t)}{(1 + Ku_t)} \cdot \left[1 - \frac{VAI_t \cdot (Ku_t - Kd_t)}{VU_{t-1}(1 + Ku_t)Kd_t T} \right]} \right\} \quad (6)$$

Esta fórmula (6) es la misma (A34) que se deriva en el Apéndice A. Observe que el nivel óptimo de deuda en "t-1" sólo depende de los valores de "t", que son todos conocidos. El único valor que se requiere y que corresponde un período "t-1" es el valor sin deuda (desapalancado) de la empresa que, por definición, no depende de los niveles de deuda real o posterior y, por tanto, se puede encontrar como el valor actual de los FCL futuros descontados con sus respectivos Ku. Usando (6) con el ejemplo de la Tabla 18 tenemos

Tabla 18. Cálculo de D_{OPT} y VL

Año	0	1	2	3	4
Ku		15,00%	15,00%	15,00%	15,00%
Kd		11,00%	11,00%	11,00%	11,00%
ψ		28,22%	29,92%	32,31%	36,45%
Ke		28,22%	29,92%	32,31%	36,45%
T		35,00%	35,00%	35,00%	35,00%
FCL		17,0000	20,0000	22,0000	25,0000
VU	58,6647	50,4644	38,0340	21,7391	0,0000
FCA		8,5342	8,2569	7,2180	5,3679
P	16,6724	12,8434	8,4286	3,9341	0,0000
AI		1,7340	1,5320	1,1895	0,7054
VAI	3,0463	2,1720	1,2897	0,5170	0,0000
D _{OPT} from (6).(A34)	45,0385	39,7930	30,8951	18,3221	
VL = P + D	61,7109	52,6364	39,3237	22,2561	0,0000
APV = VU + VAI	61,7109	52,6364	39,3237	22,2561	0,0000
D% = D _{Opt} /VL	72,9831%	75,5998%	78,5660%	82,3237%	
VU - D	13,6261	10,6714	7,1389	3,4171	

Como se puede observar, los resultados son idénticos a los obtenidos con Solver. Para ilustrar el cálculo de D_{opt} mostramos para $t - 1 = 0$ el valor de la deuda en la Tabla 24b con eq. (6).

Tabla 19. Cálculo de los componentes de la ec. (6)

$\frac{VU_{t-1} \cdot (1 + Ku_t)}{(1 + Kd_t)}$	
$\frac{(1 + Kd_t)}{(1 + Ku_t)}$	0,965217391
$\frac{VAI_t \cdot (Ku_t - Kd_t)}{VU_{t-1} \cdot (1 + Ku_t) \cdot Kd_t \cdot T}$	0,03344884
(6)	45,03854992

Ahora ilustramos los cálculos para los dos primeros períodos de nuestro ejemplo. Supongamos que deseamos optimizar la estructura óptima de capital de una firma en que el FCL futuro es igual al de los dos primeros años de la que se muestra en la Tabla 1. Los resultados, en este caso serán:

Tabla 20. Aplicación de la fórmula (6)

Año	0	1	2
Ku		15,00%	15,00%
Kd		11,00%	11,00%
T		35,00%	35,00%
FCL		17,00	20,00
AI		0,93	0,56
VAI	1,02	0,41	0,00
FCA = FCL - FCD + AI		5,64	4,29
VU	29,91	17,39	0,00
(1) Valor de mercado del patrimonio	6,65	3,14	0,00
(2) Valor de la deuda	24,28	14,66	0,00
(3) $Ke = Ku + (Ku - Kd) \cdot D / (VU - D)$		32,25%	36,45%
(4) VL	30,93	17,80	0,00

$$D_{OPT,1} = \frac{(17,39)(1 + 0,15)}{(1 + 0,11)} \left\{ 1 - \sqrt{1 - \frac{(1 + 0,11)}{(1 + 0,15)} \left[1 - \frac{(0,00)(0,15 - 0,11)}{(17,39)(1 + 0,15)(0,11)(0,35)} \right]} \right\} = 14,66$$

$$D_{OPT,0} = \frac{(29,91)(1 + 0,15)}{(1 + 0,11)} \left\{ 1 - \sqrt{1 - \frac{(1 + 0,11)}{(1 + 0,15)} \left[1 - \frac{(0,41)(0,15 - 0,11)}{(29,91)(1 + 0,15)(0,11)(0,35)} \right]} \right\} = 24,28$$

Estos resultados se pueden representar en una gráfica de como sigue:

Figura 4: VL_0 para dos períodos como función del nivel de deuda level a $t=0$ y $t=1$

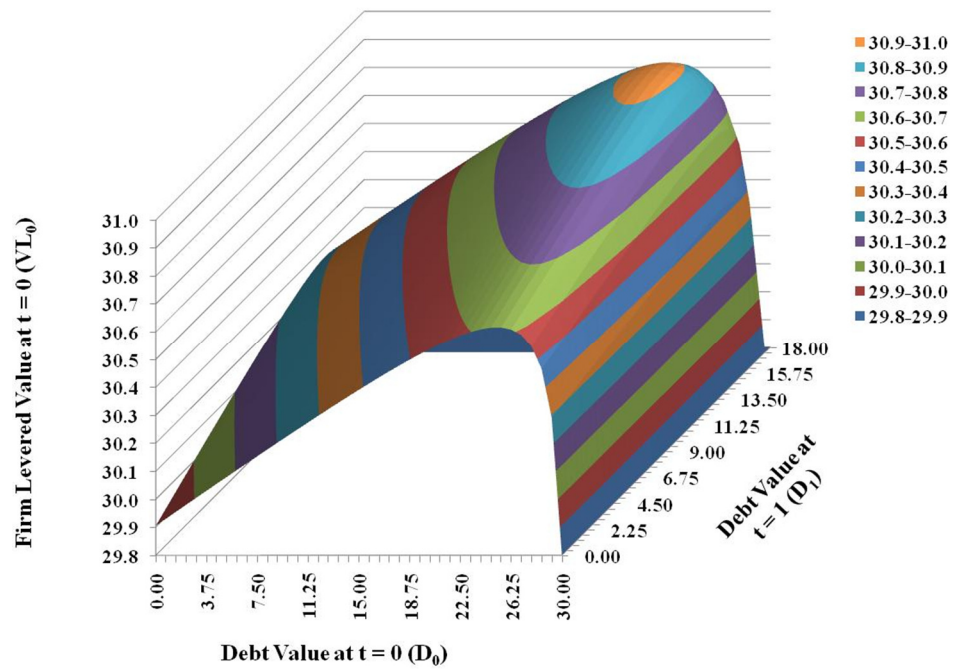
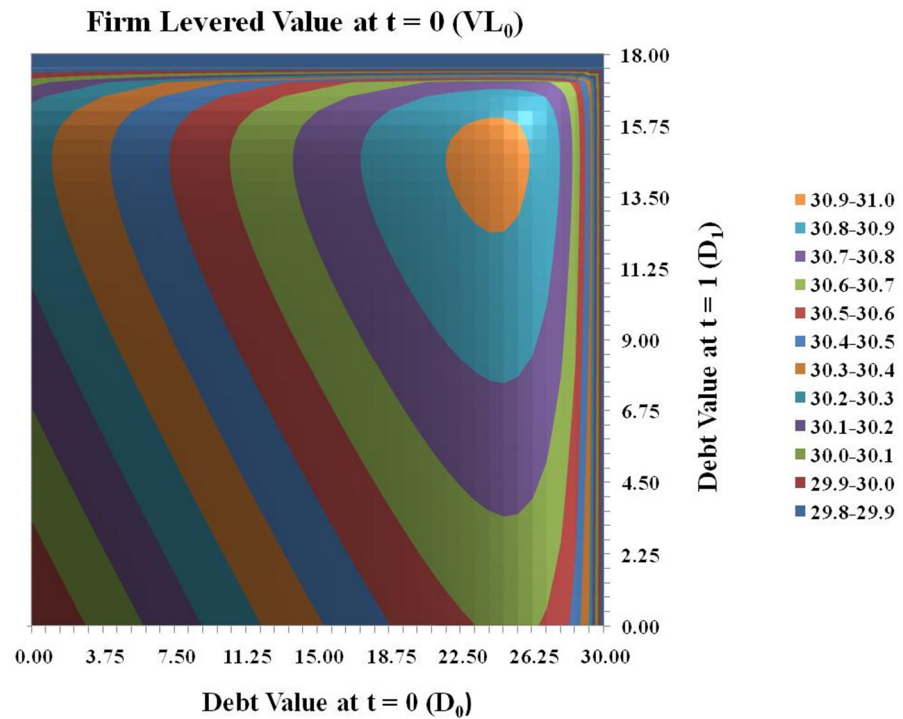


Figura 5: VL_0 para dos períodos como función del nivel de deuda a $t=0$ y $t=1$



Observe que la fórmula (6) no requiere ningún cálculo previo de K_e , la FCA o valor patrimonial. En consecuencia, el nivel óptimo de deuda resultante de dicha aplicación puede ser incluida directamente a la expresión (7) para encontrar el endeudamiento óptimo sin realizar los cálculos mencionados (véase el Apéndice A para más detalles)

La ecuación (7) es la misma ecuación (A40) del Apéndice A y se usa para graficar VL como una función del endeudamiento (ver Figuras 3 - 4):

Figura 6: VL_0 para dos períodos como función del apalancamiento a $t=0$ y $t=1$

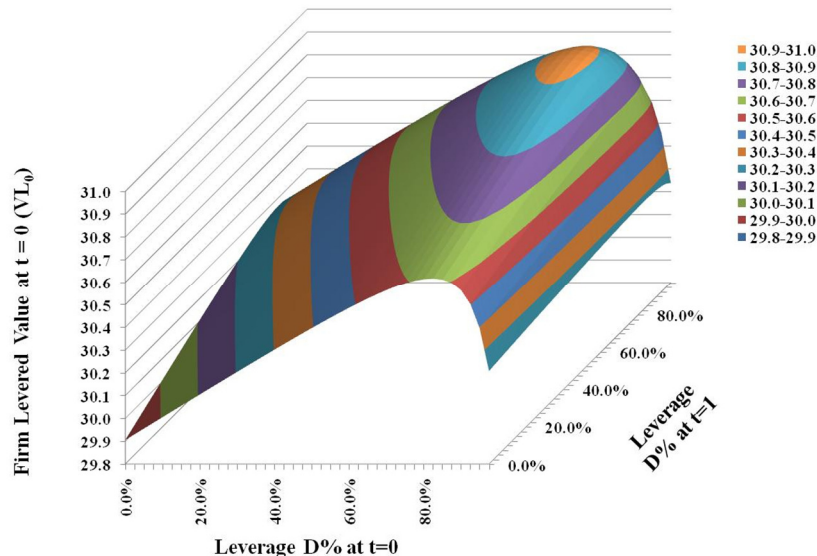
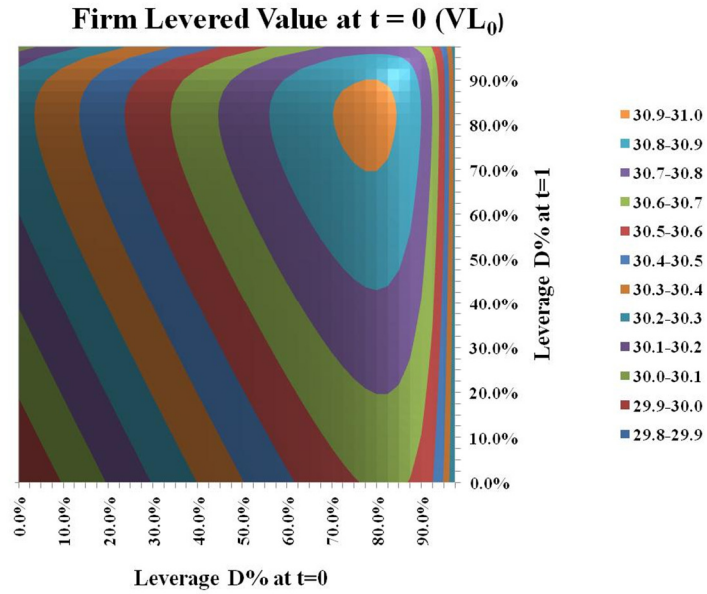


Figura 7: VL_0 para dos períodos como función del apalancamiento a $t=0$ y $t=1$



Los resultados obtenidos por medio de (7) son $D\% = 82,3237\%$ para $t = 1$ y un apalancamiento de $D\% = 78,5045\%$ para $t = 0$. Es fundamental señalar que el comportamiento observado en las figuras 4-7 se puede representar gráficamente, ya que fueron contruidos suponiendo la existencia de sólo dos períodos. Por lo tanto, un procedimiento similar para un mayor número de períodos requieren un espacio de dimensiones superiores para visualizarlos, sin embargo este número no limita la existencia de una estructura óptima de capital y la fórmula (6) sigue siendo válida.

Para completar la exposición, se presenta el caso de la estructura de capital óptima para perpetuidades con crecimiento constante. La fórmula para encontrar el nivel de endeudamiento óptimo es la siguiente (ver Apéndice B para más detalles):

$$\frac{V_L}{V_U} = \frac{1}{1 + \frac{g}{r_D}}$$

La fórmula (8) es la misma fórmula (B40) del Apéndice B. El caso particular de una perpetuidad no creciente corresponde a $g=0$ y (8) se reduce a

$$D_{OPT,t-1} = VU_{t-1} \frac{Ku_t}{Kd_t} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{Kd_t}{Ku_t}} \right] \quad (9)$$

La fórmula (9) es la misma fórmula (B41a) en el Apéndice B. Como en el caso mencionado $VU_{t-1} = FCF_t/Ku_t$, la expresión (B41a) se puede presentar en forma equivalente (que es la derivada por Tham et al. 2010) y se puede encontrar en el Apéndice B como (B41B):

$$D_{OPT,t-1} = \frac{FCF_t}{Kd_t} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{Kd_t}{Ku_t}} \right] \quad (10)$$

4. Conclusiones

En este trabajo se ha mostrado el procedimiento para calcular el valor y la estructura de capital óptimos suponiendo que Ke es la tasa de descuento para los AI con flujos de caja finitos. Se analizaron varios escenarios: apalancamiento constante y variable ($D\%$ diferente para cada período), y soluciones analíticas compactas para un número finito de períodos y perpetuidades. Se utilizaron cinco métodos conocidos y todos ellos dan idéntica respuesta.

Usando una formulación analítica para calcular la deuda óptima, las diferencias de valor son insignificantes. En este caso particular, las diferencias entre el endeudamiento constante y variable son muy pequeñas: 0,009%; sin embargo, este trabajo no pretende afirmar que esta diferencia pequeña es un comportamiento general cuando se utiliza uno u otro enfoque, sino que queda claro que el enfoque de apalancamiento variable lleva a soluciones óptimas iguales o mayores para los valores de la empresa apalancada debido a la flexibilidad de adaptar el endeudamiento de cada período como una función de los flujos de caja futuros esperados.

Además, se supuso que el costo de la deuda se mantiene constante a pesar de que se cambia el nivel de la deuda en un plazo determinado con el fin de maximizar el valor. Sin embargo, se requiere más trabajo para identificar el comportamiento de Kd como una función del apalancamiento. En consecuencia, nuestra formulación es susceptible de incluir un Kd variable, vinculado al nivel de endeudamiento lo que creará una circularidad porque las fórmulas permiten esa flexibilidad (hay que tener en cuenta que no nos estamos

refiriendo a una K_d que se le permite variar de periodo a período, nos referimos a que el costo de la deuda en un período determinado sea una función de la variación del apalancamiento).

Referencias Bibliográficas

- Kolari, J. W. y Velez-Pareja, I., (2010). Corporation Income Taxes and the Cost of Capital: A Revision (November 25). Available a SSRN: <http://ssrn.com/abstract=1715044>
- Modigliani, Franco y Merton H. Miller, 1958, The Cost of Capital, Corporation Taxes and the Theory of Investment, *The American Economic Review*. Vol XLVIII, pp 261-297
- Tham J. y Vélez-Pareja, I., (2004). *Principles of Cash Flow Valuation. An Integrated Market Based Approach*, Boston: Academic Press.
- Tham, J., Velez-Pareja, I. y Kolari, J. (2010). Cost of Capital with Levered Cost of Equity as the Risk of Tax Shields (August 9). Available a SSRN: <http://ssrn.com/abstract=1655244>.

Apéndice A

Derivación de la fórmula general para la estructura óptima de capital cuando hay un número finito de períodos y $\psi_t = Ke_t$

Partimos de los siguientes principios básicos de las finanzas:

$$VL_{t-1} = P_{t-1} + D_{t-1} = VU_{t-1} + VAI_{t-1} \quad (A1)$$

$$AI_t = D_{t-1} \cdot Kd_t \cdot T \quad (A2)$$

$$VAI_t = VAI_{t-1} \cdot (1 + \psi_t) - AI_t \quad (A3)$$

$$VAI_{t-1} = \frac{VAI_t + AI_t}{1 + \psi_t} \quad (A4)$$

Y la expresión de Ke como la tasa de descuento para los AI (Ver Tham, Velez-Pareja y Kolari 2010):

$$Ke_t = \psi_t = Ku_t + \frac{(Ku_t - Kd_t) \cdot D_{t-1}}{VU_{t-1} - D_{t-1}} \quad (A5)$$

El objetivo de esta sección es encontrar el valor de D_{t-1} que maximiza el valor de la firma apalancada, VL_{t-1} . Es necesario tener en cuenta que es mucho más fácil encontrar el óptimo nivel absoluto de la deuda D_{t-1} que encontrar el apalancamiento óptimo, $D\% = D_{t-1}/(E_{t-1} + D_{t-1})$, ya que las fórmulas de estos últimos son más complejas. En consecuencia, el procedimiento consiste en encontrar la derivada de VL_{t-1} con respecto a D_{t-1} , igual a cero, y resolver la ecuación resultante con D_{t-1} de como la incógnita de encontrar el óptimo.

Con el fin de encontrar la mencionada derivada se utiliza la regla de la cadena del cálculo diferencial debido a que la expresión resultante será un producto de varios factores, lo que hace más fácil resolver las ecuaciones para los valores óptimos (aunque, como se verá, sólo hay uno):

$$\frac{dVL_{t-1}}{dD_{t-1}} = \frac{dVL_{t-1}}{dVAI_{t-1}} \cdot \frac{dVAI_{t-1}}{d\psi_t} \cdot \frac{d\psi_t}{dD_{t-1}} \quad (A6)$$

Puesto que las expresiones de cada uno de los factores en el lado derecho (RHS) de (A6) se necesitan, procedemos a buscar la del tercer término en primer lugar y derivamos ambos lados de (A5) con respecto a D_{t-1} :

$$\frac{d\psi_t}{dD_{t-1}} = \frac{dKu_t}{dD_{t-1}} + \frac{(VU_{t-1} - D_{t-1}) \cdot \frac{d}{dD_{t-1}} [(Ku_t - Kd_t) \cdot D_{t-1}] - (Ku_t - Kd_t) \cdot D_{t-1} \cdot \frac{d}{dD_{t-1}} (VU_{t-1} - D_{t-1})}{(VU_{t-1} - D_{t-1})^2}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\psi_t}{dD_{t-1}} &= 0 + \frac{(VU_{t-1} - D_{t-1}) \cdot (Ku_t - Kd_t) - (Ku_t - Kd_t) \cdot D_{t-1} \cdot (-1)}{(VU_{t-1} - D_{t-1})^2} \\
\frac{d\psi_t}{dD_{t-1}} &= \frac{(VU_{t-1} - D_{t-1}) \cdot (Ku_t - Kd_t) + (Ku_t - Kd_t) \cdot D_{t-1}}{(VU_{t-1} - D_{t-1})^2} \\
\frac{d\psi_t}{dD_{t-1}} &= \frac{(VU_{t-1} - D_{t-1} + D_{t-1}) \cdot (Ku_t - Kd_t)}{(VU_{t-1} - D_{t-1})^2} \\
\frac{d\psi_t}{dD_{t-1}} &= \frac{VU_{t-1} \cdot (Ku_t - Kd_t)}{(VU_{t-1} - D_{t-1})^2} \tag{A7}
\end{aligned}$$

Tenga en cuenta que VU_{t-1} y Ku_{t-1} se tratan de como constantes, ya que son, por definición, independiente del nivel de la deuda. Por el contrario, Kd_t puede aumentar con el apalancamiento, una situación que demanda una expresión para el costo de la deuda como una función de D_{t-1} , sin embargo, en este artículo Kd_t se supone, por razones de simplicidad ser independiente del nivel de la deuda. Por lo tanto, la derivada de (A4) con respecto a ψ_t , tenemos que

$$\frac{dVAI_{t-1}}{d\psi_t} = \frac{(1 + \psi_t) \cdot \frac{d}{d\psi_t} (VAI_t + AI_t) - (VAI_t + AI_t) \cdot \frac{d}{d\psi_t} (1 + \psi_t)}{(1 + \psi_t)^2} \tag{A8}$$

$$\frac{dVAI_{t-1}}{d\psi_t} = \frac{(1 + \psi_t) \cdot \frac{d}{d\psi_t} (VAI_t + D_{t-1} \cdot Kd_t \cdot T) - (VAI_t + D_{t-1} \cdot Kd_t \cdot T) \cdot \frac{d}{d\psi_t} (1 + \psi_t)}{(1 + \psi_t)^2} \quad (A9) = (A2) \text{ in } (A8)$$

$$\frac{dVAI_{t-1}}{d\psi_t} = \frac{(1 + \psi_t) \cdot Kd_t \cdot T \cdot \frac{dD_{t-1}}{d\psi_t} - (VAI_t + D_{t-1} \cdot Kd_t \cdot T) \cdot (1)}{(1 + \psi_t)^2} \tag{A10}$$

$$\frac{dD_{t-1}}{d\psi_t} = \left(\frac{d\psi_t}{dD_{t-1}} \right)^{-1} \tag{A11}$$

$$\frac{dVAI_{t-1}}{d\psi_t} = \frac{(1 + \psi_t) \cdot Kd_t \cdot T \cdot \left[\frac{(VU_{t-1} - D_{t-1})^2}{VU_{t-1} \cdot (Ku_t - Kd_t)} \right] - (VAI_t + D_{t-1} \cdot Kd_t \cdot T)}{(1 + \psi_t)^2} \quad (A12) = (A7), (A11) \text{ in } (A10)$$

Observe que VAI_t también se trata como una constante, que es de vital importancia, lo que se deriva del hecho de que se trata de una función de ψ_t y valores de ψ de los períodos futuros (si existen), pero es independiente de ψ_t . Sin embargo, esto no es cierto en el caso de TS_t , ya que depende de D_{t-1} que, a su vez, está relacionado con ψ_t a través de (A5).

Ahora procedemos a encontrar la derivada del valor apalancado de la empresa con respecto al valor presente del escudo fiscal (VAI), utilizando (A1):

$$\frac{dVL_{t-1}}{dVAI_{t-1}} = \frac{dVU_{t-1}}{dVAI_{t-1}} + \frac{dVAI_{t-1}}{dVAI_{t-1}} \quad (A13)$$

Ya que el valor sin deuda de la empresa es independiente de VAI,

$$\frac{dVL_{t-1}}{dVAI_{t-1}} = 0 + 1 = 1 \quad (A14)$$

Agrupando los factores (A14) (A12) y (A7), en (A6) y haciendo derivada resultante igual a cero, tenemos que

$$\begin{aligned} & \frac{dVL_{t-1}}{dD_{t-1}} \\ &= (1) \cdot \left\{ \frac{(1 + \psi_t) \cdot Kd_t \cdot T \cdot \left[\frac{(VU_{t-1} - D_{OPT,t-1})^2}{VU_{t-1} \cdot (Ku_t - Kd_t)} \right] - (VAI_t + D_{OPT,t-1} \cdot Kd_t \cdot T)}{(1 + \psi_t)^2} \right\} \cdot \left[\frac{VU_{t-1} \cdot (Ku_t - Kd_t)}{(VU_{t-1} - D_{OPT,t-1})^2} \right] = 0 \end{aligned} \quad (A15)$$

$$\begin{aligned} \frac{dVL_{t-1}}{dD_{t-1}} &= \left\{ \frac{(1 + \psi_t) \cdot Kd_t \cdot T \cdot \left[\frac{(VU_{t-1} - D_{OPT,t-1})^2}{VU_{t-1} \cdot (Ku_t - Kd_t)} \right] - (VAI_t + D_{OPT,t-1} \cdot Kd_t \cdot T)}{(1 + \psi_t)^2} \right\} \cdot \left[\frac{VU_{t-1} \cdot (Ku_t - Kd_t)}{(VU_{t-1} - D_{OPT,t-1})^2} \right] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (A16)$$

Las soluciones para el nivel óptimo de la deuda $D_{Opt\ t-1}$, derivado del primer factor de (A16) son los siguientes:

$$\begin{aligned} & \frac{(1 + \psi_t) \cdot Kd_t \cdot T \cdot \left[\frac{(VU_{t-1} - D_{OPT,t-1})^2}{VU_{t-1} \cdot (Ku_t - Kd_t)} \right] - (VAI_t + D_{OPT,t-1} \cdot Kd_t \cdot T)}{(1 + \psi_t)^2} = 0 \\ & (1 + \psi_t) \cdot Kd_t \cdot T \cdot \left[\frac{(VU_{t-1} - D_{OPT,t-1})^2}{VU_{t-1} \cdot (Ku_t - Kd_t)} \right] - (VAI_t + D_{OPT,t-1} \cdot Kd_t \cdot T) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (A17)$$

$$\begin{aligned} & \left[1 + Ku_t + \frac{(Ku_t - Kd_t) \cdot D_{OPT,t-1}}{VU_{t-1} - D_{OPT,t-1}} \right] \cdot Kd_t \cdot T \cdot \left[\frac{(VU_{t-1} - D_{OPT,t-1})^2}{VU_{t-1} \cdot (Ku_t - Kd_t)} \right] - (VAI_t + D_{OPT,t-1} \cdot Kd_t \cdot T) = 0 \\ & (A18) = (A5) \text{ in } (A17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{(1 + Ku_t) \cdot (VU_{t-1} - D_{OPT,t-1}) + (Ku_t - Kd_t) \cdot D_{OPT,t-1}}{VU_{t-1} - D_{OPT,t-1}} \right] \cdot Kd_t \cdot T \cdot \left[\frac{(VU_{t-1} - D_{OPT,t-1})^2}{VU_{t-1} \cdot (Ku_t - Kd_t)} \right] \\
& - (VAI_t + D_{OPT,t-1} \cdot Kd_t \cdot T) = 0 \\
& [(1 + Ku_t) \cdot (VU_{t-1} - D_{OPT,t-1}) + (Ku_t - Kd_t) \cdot D_{OPT,t-1}] \cdot Kd_t \cdot T \cdot \left[\frac{VU_{t-1} - D_{OPT,t-1}}{VU_{t-1} \cdot (Ku_t - Kd_t)} \right] \\
& - (VAI_t + D_{OPT,t-1} \cdot Kd_t \cdot T) = 0 \\
& (1 + Ku_t) \cdot (VU_{t-1} - D_{OPT,t-1}) \cdot Kd_t \cdot T \cdot \left[\frac{VU_{t-1} - D_{OPT,t-1}}{VU_{t-1} \cdot (Ku_t - Kd_t)} \right] \\
& + (Ku_t - Kd_t) \cdot D_{OPT,t-1} \cdot Kd_t \cdot T \cdot \left[\frac{VU_{t-1} - D_{OPT,t-1}}{VU_{t-1} \cdot (Ku_t - Kd_t)} \right] - (VAI_t + D_{OPT,t-1} \cdot Kd_t \cdot T) = 0 \\
& \frac{(1 + Ku_t) \cdot (VU_{t-1} - D_{OPT,t-1})^2 \cdot Kd_t \cdot T}{VU_{t-1} \cdot (Ku_t - Kd_t)} + D_{OPT,t-1} \cdot Kd_t \cdot T \cdot \left[\frac{VU_{t-1} - D_{OPT,t-1}}{VU_{t-1}} \right] - (VAI_t + D_{OPT,t-1} \cdot Kd_t \cdot T) \\
& = 0 \\
& \frac{(1 + Ku_t) \cdot Kd_t \cdot T \cdot (VU_{t-1} - D_{OPT,t-1})^2}{VU_{t-1} \cdot (Ku_t - Kd_t)} + D_{OPT,t-1} \cdot Kd_t \cdot T \cdot \left[\frac{VU_{t-1} - D_{OPT,t-1}}{VU_{t-1}} - 1 \right] - VAI_t = 0 \\
& \frac{(1 + Ku_t) \cdot Kd_t \cdot T \cdot (VU_{t-1} - D_{OPT,t-1})^2}{VU_{t-1} \cdot (Ku_t - Kd_t)} + D_{OPT,t-1} \cdot Kd_t \cdot T \cdot \left[\frac{VU_{t-1} - D_{OPT,t-1} - VU_{t-1}}{VU_{t-1}} \right] - VAI_t = 0 \\
& \frac{(1 + Ku_t) \cdot Kd_t \cdot T \cdot (VU_{t-1} - D_{OPT,t-1})^2}{VU_{t-1} \cdot (Ku_t - Kd_t)} - \frac{D_{OPT,t-1}^2 \cdot Kd_t \cdot T}{VU_{t-1}} - VAI_t = 0 \\
& \frac{(1 + Ku_t) \cdot (VU_{t-1} - D_{OPT,t-1})^2}{VU_{t-1} \cdot (Ku_t - Kd_t)} - \frac{D_{OPT,t-1}^2}{VU_{t-1}} - \frac{VAI_t}{Kd_t \cdot T} = 0 \\
& \frac{(1 + Ku_t) \cdot (VU_{t-1} - D_{OPT,t-1})^2}{(Ku_t - Kd_t)} - D_{OPT,t-1}^2 - \frac{VU_{t-1} \cdot VAI_t}{Kd_t \cdot T} = 0 \\
& (1 + Ku_t) \cdot (VU_{t-1} - D_{OPT,t-1})^2 - D_{OPT,t-1}^2 \cdot (Ku_t - Kd_t) - \frac{VU_{t-1} \cdot (Ku_t - Kd_t) \cdot VAI_t}{Kd_t \cdot T} = 0 \\
& (1 + Ku_t) \cdot (VU_{t-1}^2 - 2 \cdot VU_{t-1} \cdot D_{OPT,t-1} + D_{OPT,t-1}^2) - D_{OPT,t-1}^2 \cdot (Ku_t - Kd_t) - \frac{VU_{t-1} \cdot (Ku_t - Kd_t) \cdot VAI_t}{Kd_t \cdot T} = 0 \\
& -D_{OPT,t-1}^2 \cdot (Ku_t - Kd_t - 1 - Ku_t) - 2 \cdot D_{OPT,t-1} \cdot VU_{t-1} \cdot (1 + Ku_t) - \frac{VU_{t-1} \cdot (Ku_t - Kd_t) \cdot VAI_t}{Kd_t \cdot T} \\
& + VU_{t-1}^2 \cdot (1 + Ku_t) = 0 \\
& -D_{OPT,t-1}^2 \cdot (1 + Kd_t) - 2 \cdot D_{OPT,t-1} \cdot VU_{t-1} \cdot (1 + Ku_t) + \frac{VU_{t-1}^2 \cdot (1 + Ku_t) \cdot Kd_t \cdot T - VU_{t-1} \cdot (Ku_t - Kd_t) \cdot VAI_t}{Kd_t \cdot T} \\
& = 0 \\
& D_{OPT,t-1}^2 \cdot (1 + Kd_t) - 2 \cdot D_{OPT,t-1} \cdot VU_{t-1} \cdot (1 + Ku_t) + \frac{VU_{t-1} \cdot [VU_{t-1} \cdot (1 + Ku_t) \cdot Kd_t \cdot T - (Ku_t - Kd_t) \cdot VAI_t]}{Kd_t \cdot T} \\
& = 0 \\
& D_{OPT,t-1}^2 \cdot \frac{(1 + Kd_t)}{VU_{t-1}} - 2 \cdot D_{OPT,t-1} \cdot (1 + Ku_t) + \frac{VU_{t-1} \cdot (1 + Ku_t) \cdot Kd_t \cdot T - (Ku_t - Kd_t) \cdot VTS_t}{Kd_t \cdot T} = 0 \quad (A19)
\end{aligned}$$

Esta es una ecuación de segundo grado en $D_{\text{Opt } t-1}$ que puede ser resuelta por medio de la fórmula general:

$$A = \frac{(1 + Kd_t)}{VU_{t-1}} \quad (\text{A20})$$

$$B = -2 \cdot (1 + Ku_t) \quad (\text{A21})$$

$$C = \frac{VU_{t-1} \cdot (1 + Ku_t) \cdot Kd_t \cdot T - (Ku_t - Kd_t) \cdot VTS_t}{Kd_t \cdot T} \quad (\text{A22})$$

$$D_{\text{OPT},t-1} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4 \cdot A \cdot C}}{2 \cdot A} \quad (\text{A23})$$

$$D_{\text{OPT},t-1} = \frac{2 \cdot (1 + Ku_t) \pm \sqrt{4 \cdot (1 + Ku_t)^2 - 4 \cdot \frac{(1 + Kd_t)}{VU_{t-1}} \cdot \frac{VU_{t-1} \cdot (1 + Ku_t) \cdot Kd_t \cdot T - (Ku_t - Kd_t) \cdot VTS_t}{Kd_t \cdot T}}}{2 \cdot \frac{(1 + Kd_t)}{VU_{t-1}}}$$

(A24) = (A20), (A21) and (A22) in (A23)

$$D_{\text{OPT},t-1} = \frac{(1 + Ku_t) \pm \sqrt{(1 + Ku_t)^2 - \frac{(1 + Kd_t)}{VU_{t-1}} \cdot \frac{VU_{t-1} \cdot (1 + Ku_t) \cdot Kd_t \cdot T - (Ku_t - Kd_t) \cdot VAI_t}{Kd_t \cdot T}}}{\frac{(1 + Kd_t)}{VU_{t-1}}}$$

$$D_{\text{OPT},t-1} = \frac{(1 + Ku_t) \pm \sqrt{(1 + Ku_t)^2 - \frac{VU_{t-1} \cdot (1 + Ku_t) \cdot (1 + Kd_t) \cdot Kd_t \cdot T - (Ku_t - Kd_t) \cdot (1 + Kd_t) \cdot VAI_t}{VU_{t-1} \cdot Kd_t \cdot T}}}{\frac{(1 + Kd_t)}{VU_{t-1}}}$$

$$D_{\text{OPT},t-1} = \frac{(1 + Ku_t) \pm \sqrt{(1 + Ku_t)^2 - (1 + Ku_t) \cdot (1 + Kd_t) + \frac{(Ku_t - Kd_t) \cdot (1 + Kd_t) \cdot VAI_t}{VU_{t-1} \cdot Kd_t \cdot T}}}{\frac{(1 + Kd_t)}{VU_{t-1}}}$$

$$D_{\text{OPT},t-1} = \frac{VU_{t-1}}{(1 + Kd_t)} \cdot \left[(1 + Ku_t) \pm \sqrt{(1 + Ku_t)^2 - (1 + Ku_t) \cdot (1 + Kd_t) + \frac{(Ku_t - Kd_t) \cdot (1 + Kd_t) \cdot VAI_t}{VU_{t-1} \cdot Kd_t \cdot T}} \right]$$

$$D_{\text{OPT},t-1} = \frac{VU_{t-1} \cdot (1 + Ku_t)}{(1 + Kd_t)} \cdot \left[1 \pm \sqrt{\frac{(1 + Ku_t)^2}{(1 + Ku_t)^2} - \frac{(1 + Ku_t) \cdot (1 + Kd_t)}{(1 + Ku_t)^2} + \frac{(Ku_t - Kd_t) \cdot (1 + Kd_t) \cdot VAI_t}{VU_{t-1} \cdot (1 + Ku_t)^2 \cdot Kd_t \cdot T}} \right]$$

$$D_{\text{OPT},t-1} = \frac{VU_{t-1} \cdot (1 + Ku_t)}{(1 + Kd_t)} \cdot \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{(1 + Kd_t)}{(1 + Ku_t)} + \frac{(1 + Kd_t)}{(1 + Ku_t)} \cdot \frac{VAI_t \cdot (Ku_t - Kd_t)}{VU_{t-1} \cdot (1 + Ku_t) \cdot Kd_t \cdot T}} \right]$$

$$D_{\text{OPT},t-1} = \frac{VU_{t-1} \cdot (1 + Ku_t)}{(1 + Kd_t)} \cdot \left\{ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{(1 + Kd_t)}{(1 + Ku_t)} \cdot \left[1 - \frac{VTS_t \cdot (Ku_t - Kd_t)}{VU_{t-1} \cdot (1 + Ku_t) \cdot Kd_t \cdot T} \right]} \right\} \quad (\text{A25})$$

La ecuación (A25) tiene una raíz para el caso del signo positivo antes del radical, y otra para el signo negativo, por lo que tenemos que identificar cuál es coherente desde un punto de vista financiero:

$$\frac{D_{OPT,t-1}}{VU_{t-1}} = \frac{(1 + Ku_t)}{(1 + Kd_t)} \cdot \left\{ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{(1 + Kd_t)}{(1 + Ku_t)} \cdot \left[1 - \frac{VAI_t \cdot (Ku_t - Kd_t)}{VU_{t-1} \cdot (1 + Ku_t) \cdot Kd_t \cdot T} \right]} \right\} \quad (A26)$$

Kolari y Vélez-Pareja (2010) muestran que $VU_{t-1} > D_{t-1}$, de lo contrario, implicaría un valor negativo para el patrimonio sin deuda. En consecuencia:

$$\frac{D_{OPT,t-1}}{VU_{t-1}} < 1 \quad (A27)$$

$$\frac{(1 + Ku_t)}{(1 + Kd_t)} \cdot \left\{ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{(1 + Kd_t)}{(1 + Ku_t)} \cdot \left[1 - \frac{VAI_t \cdot (Ku_t - Kd_t)}{VU_{t-1} \cdot (1 + Ku_t) \cdot Kd_t \cdot T} \right]} \right\} < 1 \quad (A28) = (A26) \text{ in } (A27)$$

$$\begin{aligned} 1 \pm \sqrt{1 - \frac{(1 + Kd_t)}{(1 + Ku_t)} \cdot \left[1 - \frac{VAI_t \cdot (Ku_t - Kd_t)}{VU_{t-1} \cdot (1 + Ku_t) \cdot Kd_t \cdot T} \right]} &< \frac{(1 + Kd_t)}{(1 + Ku_t)} \\ \pm \sqrt{1 - \frac{(1 + Kd_t)}{(1 + Ku_t)} \cdot \left[1 - \frac{VAI_t \cdot (Ku_t - Kd_t)}{VU_{t-1} \cdot (1 + Ku_t) \cdot Kd_t \cdot T} \right]} &< \frac{(1 + Kd_t)}{(1 + Ku_t)} - 1 \end{aligned} \quad (A29)$$

Además, Ku_t debe ser mayor que Kd_t , por definición:

$$\frac{(1 + Kd_t)}{(1 + Ku_t)} - 1 < 0 \quad (A30)$$

$$\pm \sqrt{1 - \frac{(1 + Kd_t)}{(1 + Ku_t)} \cdot \left[1 - \frac{VAI_t \cdot (Ku_t - Kd_t)}{VU_{t-1} \cdot (1 + Ku_t) \cdot Kd_t \cdot T} \right]} < \frac{(1 + Kd_t)}{(1 + Ku_t)} - 1 < 0 \quad (A31) = (A30) \text{ y } (A29)$$

$$\pm \sqrt{1 - \frac{(1 + Kd_t)}{(1 + Ku_t)} \cdot \left[1 - \frac{VAI_t \cdot (Ku_t - Kd_t)}{VU_{t-1} \cdot (1 + Ku_t) \cdot Kd_t \cdot T} \right]} < 0 \quad (A32)$$

Con el fin de producir raíces reales, la expresión bajo el radical debe ser positiva y, en consecuencia, (A32) se cumple sólo si el signo antes del radical es negativo:

$$-\sqrt{1 - \frac{(1 + Kd_t)}{(1 + Ku_t)} \cdot \left[1 - \frac{VTS_t \cdot (Ku_t - Kd_t)}{VU_{t-1} \cdot (1 + Ku_t) \cdot Kd_t \cdot T} \right]} < 0 \quad (A33)$$

Por lo tanto, la fórmula para el óptimo nivel de deuda en un determinado período "t-1" es

$$D_{OPT,t-1} = \frac{VU_{t-1} \cdot (1 + Ku_t)}{(1 + Kd_t)} \cdot \left\{ 1 - \sqrt{1 - \frac{(1 + Kd_t)}{(1 + Ku_t)} \cdot \left[1 - \frac{VTS_t \cdot (Ku_t - Kd_t)}{VU_{t-1} \cdot (1 + Ku_t) \cdot Kd_t \cdot T} \right]} \right\} \quad (A34)$$

Y, finalmente, para el segundo factor de (A16) tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{VU_{t-1} \cdot (Ku_t - Kd_t)}{(VU_{t-1} - D_{t-1})^2} &= 0 \\ VU_{t-1} \cdot (Ku_t - Kd_t) &= 0 \end{aligned}$$

La ecuación anterior no tiene soluciones ya que su lado izquierdo (LHS) es independiente de la variable D_{t-1} . Volviendo a (A34), el siguiente análisis busca las condiciones necesarias para obtener las raíces reales de la ecuación, es decir, en qué condiciones la expresión bajo el radical es igual o mayor que cero:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{(1 + Kd_t)}{(1 + Ku_t)} \cdot \left[1 - \frac{VAI_t \cdot (Ku_t - Kd_t)}{VU_{t-1} \cdot (1 + Ku_t) \cdot Kd_t \cdot T} \right] &\geq 0 \\ \frac{(1 + Kd_t)}{(1 + Ku_t)} \cdot \left[1 - \frac{VAI_t \cdot (Ku_t - Kd_t)}{VU_{t-1} \cdot (1 + Ku_t) \cdot Kd_t \cdot T} \right] &\leq 1 \\ 1 - \frac{VAI_t \cdot (Ku_t - Kd_t)}{VU_{t-1} \cdot (1 + Ku_t) \cdot Kd_t \cdot T} &\leq \frac{(1 + Ku_t)}{(1 + Kd_t)} \\ - \frac{VAI_t \cdot (Ku_t - Kd_t)}{VU_{t-1} \cdot (1 + Ku_t) \cdot Kd_t \cdot T} &\leq \frac{(1 + Ku_t)}{(1 + Kd_t)} - 1 \\ 1 - \frac{(1 + Ku_t)}{(1 + Kd_t)} &\leq \frac{VAI_t \cdot (Ku_t - Kd_t)}{VU_{t-1} \cdot (1 + Ku_t) \cdot Kd_t \cdot T} \\ \frac{(1 + Kd_t) - (1 + Ku_t)}{(1 + Kd_t)} &\leq \frac{VAI_t \cdot (Ku_t - Kd_t)}{VU_{t-1} \cdot (1 + Ku_t) \cdot Kd_t \cdot T} \\ - \frac{(Ku_t - Kd_t)}{(1 + Kd_t)} &\leq \frac{VAI_t \cdot (Ku_t - Kd_t)}{VU_{t-1} \cdot (1 + Ku_t) \cdot Kd_t \cdot T} \\ \frac{VTS_t \cdot (1 + Kd_t)}{VU_{t-1} \cdot (1 + Ku_t) \cdot Kd_t \cdot T} &\geq -1 \end{aligned} \quad (A35)$$

Puesto que $(1 + Kd_t)$, $(1 + Ku_t)$, y Kd_t deben ser positivos, los únicos casos para los cuales una estructura óptima de capital no existiría son aquellos en los que el cociente (VAI_t/VU_{t-1}) es negativo. Esta situación puede observarse en las empresas con duración limitada como las concesiones, que son la explotación de un activo (una carretera, por ejemplo) transferidos a un tercero (un municipio local, por ejemplo) en condiciones óptimas al fin de la concesión, por lo tanto, requiere una inversión importante en el último

período. Esto podría provocar que el FCL de ese período fuera negativo y, en consecuencia, también VU sería negativo en el período anterior.

Hasta este punto, se ha encontrado una expresión para el óptimo nivel de deuda (A34), pero aún se carece de una fórmula para el apalancamiento óptimo. En consecuencia, la derivación a continuación presenta una expresión para el apalancamiento D% en términos de D_{t-1} , Kd_t , VU_{t-1} , y Ku_t y VAI_t :

$$VL_{t-1} = P_{t-1} + D_{t-1} = VU_{t-1} + VAI_{t-1} \quad (A1)$$

$$VAI_{t-1} = \frac{VAI_t + AI_t}{1 + \psi_t} \quad (A4)$$

$$AI_t = D_{t-1} \cdot Kd_t \cdot T \quad (A2)$$

$$\psi_t = Ku_t + \frac{(Ku_t - Kd_t) \cdot D_{t-1}}{VU_{t-1} - D_{t-1}} \quad (A5)$$

$$\psi_t = \frac{Ku_t \cdot (VU_{t-1} - D_{t-1}) + (Ku_t - Kd_t) \cdot D_{t-1}}{VU_{t-1} - D_{t-1}}$$

$$\psi_t = \frac{Ku_t \cdot VU_{t-1} - Ku_t \cdot D_{t-1} + Ku_t \cdot D_{t-1} - Kd_t \cdot D_{t-1}}{VU_{t-1} - D_{t-1}}$$

$$\psi_t = \frac{VU_{t-1} \cdot Ku_t - D_{t-1} \cdot Kd_t}{VU_{t-1} - D_{t-1}} \quad (A36)$$

$$D\% = \frac{D_{t-1}}{VL_{t-1}} \quad (A37)$$

$$VAI_{t-1} = \frac{VAI_t + D_{t-1} \cdot Kd_t \cdot T}{1 + \frac{VU_{t-1} \cdot Ku_t - D_{t-1} \cdot Kd_t}{VU_{t-1} - D_{t-1}}} \quad (A38) = (A2), (A36) \text{ in } (A4)$$

$$VAI_{t-1} = \frac{VAI_t + D_{t-1} \cdot Kd_t \cdot T}{\frac{VU_{t-1} - D_{t-1} + VU_{t-1} \cdot Ku_t - D_{t-1} \cdot Kd_t}{VU_{t-1} - D_{t-1}}}$$

$$VAI_{t-1} = \frac{(VU_{t-1} - D_{t-1}) \cdot (VAI_t + D_{t-1} \cdot Kd_t \cdot T)}{VU_{t-1} \cdot (1 + Ku_t) - D_{t-1} \cdot (1 + Kd_t)}$$

$$D\% = \frac{D_{t-1}}{VU_{t-1} + \frac{(VU_{t-1} - D_{t-1}) \cdot (VAI_t + D_{t-1} \cdot Kd_t \cdot T)}{VU_{t-1} \cdot (1 + Ku_t) - D_{t-1} \cdot (1 + Kd_t)}} \quad (A39) = (A1), (A38) \text{ in } (A37)$$

$$D\% = \frac{D_{t-1} \cdot [VU_{t-1} \cdot (1 + Ku_t) - D_{t-1} \cdot (1 + Kd_t)]}{VU_{t-1} \cdot [VU_{t-1} \cdot (1 + Ku_t) - D_{t-1} \cdot (1 + Kd_t)] + (VU_{t-1} - D_{t-1}) \cdot (VTS_t + D_{t-1} \cdot Kd_t \cdot T)} \quad (A40)$$

En consecuencia, por medio de (A40) y con usando $D_{Opt \ t-1}$ como el valor de D_{t-1} , es posible encontrar el valor óptimo para el apalancamiento. Ahora, como un paso final, se procede a derivar una expresión para D_{t-1} como una función del apalancamiento, un resultado que puede ser utilizado para trazar VL de como una función del apalancamiento:

$$\begin{aligned}
& D_{t-1} \cdot [VU_{t-1} \cdot (1 + Ku_t) - D_{t-1} \cdot (1 + Kd_t)] \\
& \quad = D\% \cdot VU_{t-1} \cdot [VU_{t-1} \cdot (1 + Ku_t) - D_{t-1} \cdot (1 + Kd_t)] \\
& \quad + D\% \cdot (VU_{t-1} - D_{t-1}) \cdot (VAI_t + D_{t-1} \cdot Kd_t \cdot T) \\
& D_{t-1} \cdot VU_{t-1} \cdot (1 + Ku_t) - D_{t-1}^2 \cdot (1 + Kd_t) \\
& \quad = D\% \cdot VU_{t-1}^2 \cdot (1 + Ku_t) - D\% \cdot VU_{t-1} \cdot D_{t-1} \cdot (1 + Kd_t) \\
& \quad + (D\% \cdot VU_{t-1} - D\% \cdot D_{t-1}) \cdot (VAI_t + D_{t-1} \cdot Kd_t \cdot T) \\
& D_{t-1} \cdot VU_{t-1} \cdot (1 + Ku_t) - D_{t-1}^2 \cdot (1 + Kd_t) \\
& \quad = D\% \cdot VU_{t-1}^2 \cdot (1 + Ku_t) - D\% \cdot VU_{t-1} \cdot D_{t-1} \cdot (1 + Kd_t) + D\% \cdot VU_{t-1} \cdot VAI_t \\
& \quad + D\% \cdot VU_{t-1} \cdot D_{t-1} \cdot Kd_t \cdot T - D\% \cdot D_{t-1} \cdot VAI_t - D\% \cdot D_{t-1}^2 \cdot Kd_t \cdot T \\
& -D_{t-1}^2 \cdot (1 + Kd_t - D\% \cdot Kd_t \cdot T) \\
& \quad + D_{t-1} \cdot [VU_{t-1} \cdot (1 + Ku_t) + D\% \cdot VU_{t-1} \cdot (1 + Kd_t) - D\% \cdot VU_{t-1} \cdot Kd_t \cdot T + D\% \cdot VAI_t] \\
& \quad - D\% \cdot VU_{t-1}^2 \cdot (1 + Ku_t) - D\% \cdot VU_{t-1} \cdot VAI_t = 0 \\
& -D_{t-1}^2 \cdot [1 + Kd_t \cdot (1 - D\% \cdot T)] + D_{t-1} \cdot \{VU_{t-1} \cdot (1 + Ku_t) + D\% \cdot VU_{t-1} \cdot [1 + Kd_t \cdot (1 - T)] + D\% \cdot VAI_t\} \\
& \quad - D\% \cdot VU_{t-1} \cdot [VU_{t-1} \cdot (1 + Ku_t) + VAI_t] = 0 \\
& D_{t-1}^2 \cdot [1 + Kd_t \cdot (1 - D\% \cdot T)] - D_{t-1} \cdot \{VU_{t-1} \cdot (1 + Ku_t) + D\% \cdot VU_{t-1} \cdot [1 + Kd_t \cdot (1 - T)] + D\% \cdot VTS_t\} \\
& \quad + D\% \cdot VU_{t-1} \cdot [VU_{t-1} \cdot (1 + Ku_t) + VTS_t] = 0 \tag{A41}
\end{aligned}$$

La ecuación (A41) y tiene una forma cuadrática, por lo tanto, puede ser resuelta por medio de la fórmula general

$$D_{t-1} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4 \cdot A \cdot C}}{2 \cdot A} \tag{A23}$$

Y los siguientes valores para A, B y C:

$$A = 1 + Kd_t \cdot (1 - D\% \cdot T) \tag{A42}$$

$$B = -VU_{t-1} \cdot (1 + Ku_t) - D\% \cdot \{VU_{t-1} \cdot [1 + Kd_t \cdot (1 - T)] + VTS_t\} \tag{A43}$$

$$C = D\% \cdot VU_{t-1} \cdot [VU_{t-1} \cdot (1 + Ku_t) + VTS_t] \tag{A44}$$

La expresión resultante no se muestra en este documento debido a consideraciones de longitud, pero su aplicación numérica es muy sencilla

Apéndice B

Derivación de la fórmula general para la estructura óptima de capital para perpetuidades con un crecimiento constante cuando $\psi_t = Ke_t$ $\psi_t = Ke_t$

El problema de obtener una fórmula general recursiva para encontrar la estructura óptima de capital en cada período de un proceso de valoración con un número finito de ellos se resolvió en el Anexo A. Por lo tanto, el Apéndice B se centra en la solución del

mismo problema con perpetuidades, un proceso que es muy similar al presentado en el apéndice anterior. Por lo tanto, la derivación menciona parte de los siguientes principios básicos de las finanzas de perpetuidades:

$$P_{t-1} = \frac{FCA_t}{Ke_t - g} \quad (B1)$$

$$VU_{t-1} = \frac{FCL_t}{Ku_t - g} \quad (B2)$$

$$VAI_{t-1} = \frac{AI_t}{\psi_t - g} \quad (B3)$$

$$VL_{t-1} = P_{t-1} + D_{t-1} = VU_{t-1} + VAI_{t-1} \quad (B4)$$

$$P_{t-1} + D_{t-1} = \frac{FCL_t}{Ku_t - g} + \frac{AI_t}{\psi_t - g} \quad (B5) = (B2), (B3) \text{ in } (B4)$$

$$AI_t = D_{t-1} \cdot Kd_t \cdot T \quad (A2)$$

$$FCA_t = FCL_t + D_t - D_{t-1} - D_{t-1} Kd_t \cdot (1 - T) \quad (B6)$$

$$D_t = D_{t-1} \cdot (1 + g) \quad (B7)$$

$$D_t - D_{t-1} = D_{t-1} \cdot g \quad (B8)$$

$$FCA_t = FCL_t + D_{t-1} \cdot g - D_{t-1} \cdot Kd_t + D_{t-1} \cdot Kd_t \cdot T \quad (B9) = (B8) \text{ in } (B6)$$

$$FCA_t = FCL_t - D_{t-1} \cdot (Kd_t - g) + AI_t \quad (B10) = (B6) \text{ in } (B9)$$

$$\psi_t = Ke_t \quad (B11)$$

$$\frac{FCA_t}{\psi_t - g} + D_{t-1} = VU_{t-1} + \frac{AI_t}{\psi_t - g} \quad (B12) = (B1), (B2), (B3) \text{ y } (B11) \text{ in } (B4)$$

$$\frac{FCA_t - AI_t}{\psi_t - g} = VU_{t-1} - D_{t-1} \quad (B13)$$

$$\frac{FCL_t - D_{t-1} \cdot (Kd_t - g) + AI_t - AI_t}{\psi_t - g} = VU_{t-1} - D_{t-1} \quad (B14) = (B10) \text{ in } (B13)$$

$$\frac{FCL_t - D_{t-1} \cdot (Kd_t - g)}{\psi_t - g} = VU_{t-1} - D_{t-1}$$

$$\psi_t = \frac{FCL_t - D_{t-1} \cdot (Kd_t - g)}{VU_{t-1} - D_{t-1}} + g$$

$$\psi_t = \frac{FCL_t - D_{t-1} \cdot (Kd_t - g) + g \cdot (VU_{t-1} - D_{t-1})}{VU_{t-1} - D_{t-1}}$$

$$\psi_t = \frac{FCL_t - D_{t-1} \cdot Kd_t + D_{t-1} \cdot g + VU_{t-1} \cdot g - D_{t-1} \cdot g}{VU_{t-1} - D_{t-1}}$$

$$\psi_t = \frac{FCL_t - D_{t-1} \cdot Kd_t + VU_{t-1} \cdot g}{VU_{t-1} - D_{t-1}}$$

$$\begin{aligned}
\psi_t &= \frac{\frac{FCL_t \cdot (Ku_t - g)}{Ku_t - g} - D_{t-1} \cdot Kd_t + \frac{FCL_t}{Ku_t - g} \cdot g}{VU_{t-1} - D_{t-1}} \\
\psi_t &= \frac{\frac{FCL_t \cdot (Ku_t - g + g)}{Ku_t - g} - D_{t-1} \cdot Kd_t}{VU_{t-1} - D_{t-1}} \\
\psi_t &= \frac{\frac{FCL_t \cdot (Ku_t)}{Ku_t - g} - D_{t-1} \cdot Kd_t}{VU_{t-1} - D_{t-1}} \\
\psi_t &= \frac{VU_{t-1} \cdot Ku_t - D_{t-1} \cdot Kd_t}{VU_{t-1} - D_{t-1}} \tag{B16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_t &= \frac{VU_{t-1} \cdot Ku_t - Ku_t \cdot D_{t-1} + Ku_t \cdot D_{t-1} - D_{t-1} \cdot Kd_t}{VU_{t-1} - D_{t-1}} \\
\psi_t &= \frac{Ku_t \cdot (VU_{t-1} - D_{t-1}) + (Ku_t - Kd_t) \cdot D_{t-1}}{VU_{t-1} - D_{t-1}} \\
\psi_t &= Ku_t + \frac{(Ku_t - Kd_t) \cdot D_{t-1}}{VU_{t-1} - D_{t-1}} \tag{B17}
\end{aligned}$$

Usando la regla de la cadena del cálculo diferencial, tenemos:

$$\frac{dVL_{t-1}}{dD_{t-1}} = \frac{dVL_{t-1}}{dVAI_{t-1}} \cdot \frac{dVAI_{t-1}}{d\psi_t} \cdot \frac{d\psi_t}{dD_{t-1}} \tag{B18}$$

Ahora nos encontramos con expresiones para todas las derivadas individuales del lado izquierdo de (B18):

$$\begin{aligned}
\frac{dVAI_{t-1}}{d\psi_t} &= \frac{d}{d\psi_t} \frac{AI_t}{\psi_t - g} = \frac{d}{d\psi_t} \frac{D_{t-1} \cdot Kd_t \cdot T}{\psi_t - g} \\
\frac{dVAI_{t-1}}{d\psi_t} &= \frac{(\psi_t - g) \cdot \frac{d}{d\psi_t} D_{t-1} \cdot Kd_t \cdot T - D_{t-1} \cdot Kd_t \cdot T \cdot \frac{d}{d\psi_t} (\psi_t - g)}{(\psi_t - g)^2} \\
\frac{dVAI_{t-1}}{d\psi_t} &= \frac{(\psi_t - g) \cdot Kd_t \cdot T \cdot \frac{dD_{t-1}}{d\psi_t} - D_{t-1} \cdot Kd_t \cdot T \cdot \frac{d\psi_t}{d\psi_t}}{(\psi_t - g)^2} \\
\frac{dVAI_{t-1}}{d\psi_t} &= \frac{(\psi_t - g) \cdot Kd_t \cdot T \cdot \frac{dD_{t-1}}{d\psi_t} - D_{t-1} \cdot Kd_t \cdot T \cdot \frac{d\psi_t}{d\psi_t}}{(\psi_t - g)^2} \\
\frac{dVAI_{t-1}}{d\psi_t} &= \frac{Kd_t \cdot T \cdot \left[(\psi_t - g) \frac{dD_{t-1}}{d\psi_t} - D_{t-1} \right]}{(\psi_t - g)^2} \tag{B19}
\end{aligned}$$

$$\frac{dD_{t-1}}{d\psi_t} = \left(\frac{d\psi_t}{dD_{t-1}} \right)^{-1} \tag{A11}$$

$$\frac{dD_{t-1}}{d\psi_t} = \left(\frac{d\psi_t}{dD_{t-1}} \right)^{-1} = \frac{(VU_{t-1} - D_{t-1})^2}{VU_{t-1} \cdot (Ku_t - Kd_t)} \quad (B20) = (A7) \text{ in } (A11)$$

$$\frac{dVAI_{t-1}}{d\psi_t} = \frac{Kd_t \cdot T \cdot \left[\frac{(\psi_t - g) \cdot (VU_{t-1} - D_{t-1})^2}{VU_{t-1} \cdot (Ku_t - Kd_t)} - D_{t-1} \right]}{(\psi_t - g)^2} \quad (B21) = (B20) \text{ in } (B19)$$

$$\frac{dVAI_{t-1}}{d\psi_t} = \frac{Kd_t \cdot T \cdot \left[\frac{(\psi_t - g) \cdot (VU_{t-1} - D_{t-1})^2 - D_{t-1} \cdot VU_{t-1} \cdot (Ku_t - Kd_t)}{VU_{t-1} \cdot (Ku_t - Kd_t)} \right]}{(\psi_t - g)^2}$$

$$\frac{dVTS_{t-1}}{d\psi_t} = \frac{Kd_t \cdot T \cdot [(\psi_t - g) \cdot (VU_{t-1} - D_{t-1})^2 - D_{t-1} \cdot VU_{t-1} \cdot (Ku_t - Kd_t)]}{VU_{t-1} \cdot (Ku_t - Kd_t) \cdot (\psi_t - g)^2} \quad (B22)$$

$$\frac{dVL_{t-1}}{dVAI_{t-1}} = \frac{dVU_{t-1}}{dVAI_{t-1}} + \frac{dVAI_{t-1}}{dVAI_{t-1}} \quad (B23)$$

$$\frac{dVL_{t-1}}{dVAI_{t-1}} = 0 + 1 = 1 \quad (B24)$$

$$\frac{dVL_{t-1}}{dD_{t-1}} = (1) \cdot \left[\frac{Kd_t \cdot T \cdot [(\psi_t - g) \cdot (VU_{t-1} - D_{t-1})^2 - D_{t-1} \cdot VU_{t-1} \cdot (Ku_t - Kd_t)]}{VU_{t-1} \cdot (Ku_t - Kd_t) \cdot (\psi_t - g)^2} \right] \cdot \left[\frac{VU_{t-1} \cdot (Ku_t - Kd_t)}{(VU_{t-1} - D_{t-1})^2} \right]$$

(B25) = (B24), (B22), (A7) in (B18)

Ahora igualamos la derivada del valor de apalancamiento de la empresa con respecto al nivel de deuda a cero con el fin de encontrar el óptimo:

$$\frac{dVL_{t-1}}{dD_{t-1}} = \left[\frac{Kd_t \cdot T \cdot [(\psi_t - g) \cdot (VU_{t-1} - D_{OPT,t-1})^2 - D_{OPT,t-1} \cdot VU_{t-1} \cdot (Ku_t - Kd_t)]}{VU_{t-1} \cdot (Ku_t - Kd_t) \cdot (\psi_t - g)^2} \right] \cdot \left[\frac{VU_{t-1} \cdot (Ku_t - Kd_t)}{(VU_{t-1} - D_{OPT,t-1})^2} \right] = 0 \quad (B25)$$

En primer lugar, buscamos soluciones derivadas del primer factor del lado izquierdo de (B25):

$$\frac{Kd_t \cdot T \cdot [(\psi_t - g) \cdot (VU_{t-1} - D_{OPT,t-1})^2 - D_{OPT,t-1} \cdot VU_{t-1} \cdot (Ku_t - Kd_t)]}{VU_{t-1} \cdot (Ku_t - Kd_t) \cdot (\psi_t - g)^2} = 0$$

$$\left[Ku_t + \frac{(Ku_t - Kd_t) \cdot D_{OPT,t-1}}{VU_{t-1} - D_{t-1}} - g \right] \cdot (VU_{t-1} - D_{OPT,t-1})^2 - D_{OPT,t-1} \cdot VU_{t-1} \cdot (Ku_t - Kd_t) = 0$$

$$\left[\frac{(Ku_t - g) \cdot (VU_{t-1} - D_{OPT,t-1}) + (Ku_t - Kd_t) \cdot D_{OPT,t-1}}{VU_{t-1} - D_{OPT,t-1}} \right] \cdot (VU_{t-1} - D_{OPT,t-1})^2 - D_{OPT,t-1} \cdot VU_{t-1} \cdot (Ku_t - Kd_t) = 0$$

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{VU_{t-1} \cdot (Ku_t - g) + (Ku_t - Kd_t - Ku_t + g) \cdot D_{OPT,t-1}}{VU_{t-1} - D_{OPT,t-1}} \right] \cdot (VU_{t-1} - D_{OPT,t-1})^2 - D_{OPT,t-1} \cdot VU_{t-1} \cdot (Ku_t - Kd_t) \\
& = 0 \\
& \left[\frac{FCL_t - (Kd_t - g) \cdot D_{OPT,t-1}}{VU_{t-1} - D_{OPT,t-1}} \right] \cdot (VU_{t-1} - D_{OPT,t-1})^2 - D_{OPT,t-1} \cdot VU_{t-1} \cdot (Ku_t - Kd_t) = 0 \\
& [FCL_t - (Kd_t - g) \cdot D_{OPT,t-1}] \cdot (VU_{t-1} - D_{OPT,t-1}) - D_{OPT,t-1} \cdot VU_{t-1} \cdot (Ku_t - Kd_t) = 0 \\
& VU_{t-1} \cdot [FCL_t - (Kd_t - g) \cdot D_{OPT,t-1}] - D_{OPT,t-1} \cdot [FCL_t - (Kd_t - g) \cdot D_{OPT,t-1}] - D_{OPT,t-1} \cdot VU_{t-1} \cdot (Ku_t - Kd_t) \\
& = 0 \\
& VU_{t-1} \cdot [FCL_t - (Kd_t - g) \cdot D_{OPT,t-1}] - D_{OPT,t-1} \cdot [FCL_t - (Kd_t - g) \cdot D_{OPT,t-1}] - D_{OPT,t-1} \cdot VU_{t-1} \cdot (Ku_t - Kd_t) \\
& = 0 \\
& VU_{t-1} \cdot FCL_t - VU_{t-1} \cdot (Kd_t - g) \cdot D_{OPT,t-1} - D_{OPT,t-1} \cdot FCL_t + (Kd_t - g) \cdot D_{OPT,t-1}^2 \\
& - D_{OPT,t-1} \cdot VU_{t-1} \cdot (Ku_t - Kd_t) = 0 \\
& (Kd_t - g) \cdot D_{OPT,t-1}^2 - VU_{t-1} \cdot (Kd_t - g) \cdot D_{OPT,t-1} - D_{OPT,t-1} \cdot VU_{t-1} \cdot (Ku_t - Kd_t) - D_{OPT,t-1} \cdot FCL_t \\
& + VU_{t-1} \cdot FCL_t = 0 \\
& (Kd_t - g) \cdot D_{OPT,t-1}^2 - [VU_{t-1} \cdot (Kd_t - g) + VU_{t-1} \cdot (Ku_t - Kd_t) + FCL_t] \cdot D_{OPT,t-1} + VU_{t-1} \cdot FCL_t = 0 \\
& (Kd_t - g) \cdot D_{OPT,t-1}^2 - \{VU_{t-1} [Kd_t - g + Ku_t - Kd_t] + FCL_t\} \cdot D_{OPT,t-1} + VU_{t-1} \cdot FCL_t = 0 \\
& (Kd_t - g) \cdot D_{OPT,t-1}^2 - [VU_{t-1} \cdot (Ku_t - g) + FCL_t] \cdot D_{OPT,t-1} + VU_{t-1} \cdot FCL_t = 0 \\
& (Kd_t - g) \cdot D_{OPT,t-1}^2 - [FCL_t + FCL_t] \cdot D_{OPT,t-1} + VU_{t-1} \cdot FCL_t = 0 \\
& (Kd_t - g) \cdot D_{OPT,t-1}^2 - 2 \cdot FCL_t \cdot D_{OPT,t-1} + VU_{t-1} \cdot FCL_t = 0 \\
& \frac{(Kd_t - g)}{FCL_t} \cdot D_{OPT,t-1}^2 - 2 \cdot D_{OPT,t-1} + VU_{t-1} = 0 \tag{B26}
\end{aligned}$$

La ecuación (B26) tiene una forma cuadrática con $D_{OPT,t-1}$ como incógnita, y se resuelve mediante la fórmula general correspondiente:

$$A = \frac{(Kd_t - g)}{FCL_t} \tag{B27}$$

$$B = -2 \tag{B28}$$

$$C = VU_{t-1} \tag{B29}$$

$$D_{OPT,t-1} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4 \cdot A \cdot C}}{2 \cdot A} \tag{A23}$$

$$D_{OPT,t-1} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot \frac{VU_{t-1} \cdot (Kd_t - g)}{FCL_t}}}{2 \cdot \frac{(Kd_t - g)}{FCL_t}} \tag{B30} = (B27), (B28), (B29) \text{ in (A23)}$$

$$D_{OPT,t-1} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - \frac{VU_{t-1} \cdot (Kd_t - g)}{FCL_t}}}{\frac{(Kd_t - g)}{FCL_t}}$$

$$D_{OPT,t-1} = \frac{FCL_t}{(Kd_t - g)} \cdot \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{FCL_t \cdot (Kd_t - g)}{FCL_t \cdot (Ku_t - g)}} \right] \quad (B31)$$

$$D_{OPT,t-1} = VU_{t-1} \cdot \frac{(Ku_t - g)}{(Kd_t - g)} \cdot \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{(Kd_t - g)}{(Ku_t - g)}} \right] \quad (B32)$$

La observación hecha en el Apéndice A con respecto al hecho de que cuando $\psi_t = Ke_t$ el nivel de la deuda debe ser inferior al valor de la empresa sin deuda, ahora se utiliza para saber si el signo antes del radical debe ser positivo o negativo:

$$\frac{D_{OPT,t-1}}{VU_{t-1}} < 1 \quad (B33)$$

$$\begin{aligned} \frac{D_{OPT,t-1}}{VU_{t-1}} &= \frac{(Ku_t - g)}{(Kd_t - g)} \cdot \left[1 \right. \\ &\quad \left. \pm \sqrt{1 - \frac{(Kd_t - g)}{(Ku_t - g)}} \right] \end{aligned} \quad (B34)$$

$$\frac{(Ku_t - g)}{(Kd_t - g)} \cdot \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{(Kd_t - g)}{(Ku_t - g)}} \right] < 1 \quad (B35) = (B34) \text{ in } (B33)$$

$$1 \pm \sqrt{1 - \frac{(Kd_t - g)}{(Ku_t - g)}} < \frac{(Kd_t - g)}{(Ku_t - g)} \quad (B36)$$

Como Ku_t debe ser mayor que Kd_t ,

$$\frac{(Kd_t - g)}{(Ku_t - g)} < 1 \quad (B37)$$

$$1 \pm \sqrt{1 - \frac{(Kd_t - g)}{(Ku_t - g)}} < \frac{(Kd_t - g)}{(Ku_t - g)} < 1 \quad (B38) = (B37) \text{ y } (B36)$$

$$\begin{aligned} 1 \pm \sqrt{1 - \frac{(Kd_t - g)}{(Ku_t - g)}} &< 1 \\ \pm \sqrt{1 - \frac{(Kd_t - g)}{(Ku_t - g)}} &< 0 \end{aligned} \quad (B39)$$

Dado que la expresión bajo el radical debe ser positiva porque $Ku_t > Kd_t$, la desigualdad (B39) sólo es válida si el signo antes del radical es negativo:

$$-\sqrt{1 - \frac{(Kd_t - g)}{(Ku_t - g)}} < 0 \quad (B39a)$$

En consecuencia, la fórmula general para el óptimo valor de la deuda en una perpetuidad con un crecimiento constante es:

$$D_{OPT,t-1} = VU_{t-1} \cdot \frac{(Ku_t - g)}{(Kd_t - g)} \cdot \left[1 - \sqrt{1 - \frac{(Kd_t - g)}{(Ku_t - g)}} \right] \quad (B40)$$

En el caso particular de una perpetuidad no creciente, $g = 0$ y (B40) se reduce a

$$D_{OPT,t-1} = VU_{t-1} \cdot \frac{Ku_t}{Kd_t} \cdot \left[1 - \sqrt{1 - \frac{Kd_t}{Ku_t}} \right] \quad (B41a)$$

Dado que en el caso mencionado $VU_{t-1} = FCF_t / Kut$, la expresión (B41a) se puede presentar en la forma equivalente siguiente (que es el derivado por Tham et al, 2010):

$$D_{OPT,t-1} = \frac{FCF_t}{Kd_t} \cdot \left[1 - \sqrt{1 - \frac{Kd_t}{Ku_t}} \right] \quad (B41b)$$

En el siguiente paso, se obtienen expresiones de $D\%$ como una función de cualquier valor de D_{t-1} en el contexto de las perpetuidades crecientes:

$$D\% = \frac{D_{t-1}}{P_{t-1} + D_{t-1}} = \frac{D_{t-1}}{VU_{t-1} + VAI_{t-1}} \quad (B42)$$

$$D\% = \frac{D_{t-1}}{VU_{t-1} + \frac{D_{t-1} \cdot Kd_t \cdot T}{\psi_t - g}} \quad (B43) = (B3), (A2) \text{ in } (B42)$$

$$D\% = \frac{D_{t-1}}{VU_{t-1} + \frac{D_{t-1} \cdot Kd_t \cdot T}{\frac{VU_{t-1} \cdot Ku_t - D_{t-1} \cdot Kd_t}{VU_{t-1} - D_{t-1}} - g}} \quad (B44)$$

= (B16) in (B43)

$$D\% = \frac{D_{t-1}}{VU_{t-1} + \frac{D_{t-1} \cdot Kd_t \cdot T}{\frac{VU_{t-1} \cdot Ku_t - D_{t-1} \cdot Kd_t - (VU_{t-1} - D_{t-1}) \cdot g}{VU_{t-1} - D_{t-1}}}}$$

$$D\% = \frac{D_{t-1}}{VU_{t-1} + \frac{D_{t-1} \cdot Kd_t \cdot T}{\frac{VU_{t-1} \cdot Ku_t - D_{t-1} \cdot Kd_t - VU_{t-1} \cdot g + D_{t-1} \cdot g}{VU_{t-1} - D_{t-1}}}}$$

$$D\% = \frac{D_{t-1}}{VU_{t-1} + \frac{D_{t-1} \cdot Kd_t \cdot T}{\frac{VU_{t-1} \cdot (Ku_t - g) - D_{t-1} \cdot (Kd_t - g)}{VU_{t-1} - D_{t-1}}}}$$

$$D\% = \frac{D_{t-1}}{VU_{t-1} + \frac{D_{t-1} \cdot Kd_t \cdot T \cdot (VU_{t-1} - D_{t-1})}{VU_{t-1} \cdot (Ku_t - g) - D_{t-1} \cdot (Kd_t - g)}}$$

$$\begin{aligned}
D\% &= \frac{D_{t-1}}{VU_{t-1} \cdot [VU_{t-1} \cdot (Ku_t - g) - D_{t-1} \cdot (Kd_t - g)] + D_{t-1} \cdot Kd_t \cdot T \cdot (VU_{t-1} - D_{t-1})} \\
D\% &= \frac{D_{t-1} \cdot [VU_{t-1} \cdot (Ku_t - g) - D_{t-1} \cdot (Kd_t - g)]}{VU_{t-1} \cdot [VU_{t-1} \cdot (Ku_t - g) - D_{t-1} \cdot (Kd_t - g)] + D_{t-1} \cdot Kd_t \cdot T \cdot (VU_{t-1} - D_{t-1})} \\
D\% &= \frac{D_{t-1} \cdot [VU_{t-1} \cdot (Ku_t - g) - D_{t-1} \cdot (Kd_t - g)]}{VU_{t-1}^2 \cdot (Ku_t - g) - VU_{t-1} \cdot D_{t-1} \cdot (Kd_t - g) + VU_{t-1} \cdot D_{t-1} \cdot Kd_t \cdot T - D_{t-1}^2 \cdot Kd_t \cdot T} \\
D\% &= \frac{D_{t-1} \cdot [VU_{t-1} \cdot (Ku_t - g) - D_{t-1} \cdot (Kd_t - g)]}{VU_{t-1}^2 \cdot (Ku_t - g) - VU_{t-1} \cdot D_{t-1} \cdot (Kd_t - g - Kd_t \cdot T) - D_{t-1}^2 \cdot Kd_t \cdot T} \\
D\% &= \frac{D_{t-1} \cdot [VU_{t-1} \cdot (Ku_t - g) - D_{t-1} \cdot (Kd_t - g)]}{VU_{t-1}^2 \cdot (Ku_t - g) - VU_{t-1} \cdot D_{t-1} \cdot [Kd_t \cdot (1 - T) - g] - D_{t-1}^2 \cdot Kd_t \cdot T} \tag{B45a}
\end{aligned}$$

O, equivalentemente,

$$\begin{aligned}
D\% &= \frac{D_{t-1} \cdot [VU_{t-1} \cdot (Ku_t - g) - D_{t-1} \cdot (Kd_t - g)]}{VU_{t-1} \cdot FCL_t - VU_{t-1} \cdot D_{t-1} \cdot [Kd_t \cdot (1 - T) - g] - D_{t-1}^2 \cdot Kd_t \cdot T} \tag{B45b} = (B2) \text{ in (B45a)} \\
D\% &= \frac{D_{t-1} \cdot [VU_{t-1} \cdot (Ku_t - g) - D_{t-1} \cdot (Kd_t - g)]}{VU_{t-1} \cdot \{FCF_t - D_{t-1} \cdot [Kd_t \cdot (1 - T) - g]\} - D_{t-1}^2 \cdot Kd_t \cdot T} \tag{B45c}
\end{aligned}$$

For non-growing perpetuities, $g=0$; thus,

Por perpetuidades sin crecimiento, $g = 0$, por lo que

$$D\% = \frac{D_{t-1} \cdot [VU_{t-1} \cdot Ku_t - D_{t-1} \cdot Kd_t]}{VU_{t-1}^2 \cdot Ku_t - VU_{t-1} \cdot D_{t-1} \cdot Kd_t \cdot (1 - T) - D_{t-1}^2 \cdot Kd_t \cdot T} \tag{B46a}$$

O, equivalentemente,

$$D\% = \frac{D_{t-1} \cdot [FCL_t - D_{t-1} \cdot Kd_t]}{VU_{t-1} \cdot FCL_t - VU_{t-1} \cdot D_{t-1} \cdot Kd_t \cdot (1 - T) - D_{t-1}^2 \cdot Kd_t \cdot T} \tag{B46b}$$

$$D\% = \frac{D_{t-1} \cdot [FCF_t - D_{t-1} \cdot Kd_t]}{VU_{t-1} \cdot [FCF_t - D_{t-1} \cdot Kd_t \cdot (1 - T)] - D_{t-1}^2 \cdot Kd_t \cdot T} \tag{B46c}$$

As was mentioned previously in Appendix A, the numerical application of these formulas with $D_{t-1}=D_{OPT,t-1}$ make possible the calculation of the optimal leverage. Finally, a plot of VL_{t-1} como a function of leverage is presented in the main part of this document, in which the following formulation is used:

Como se mencionó anteriormente en el Apéndice A, la aplicación numérica de estas fórmulas con $D_{t-1} = D_{Opt,t-1}$, hace posible el cálculo del apalancamiento óptimo. Por último, una gráfica de VL_{t-1} como una función del apalancamiento se presenta en la parte principal de este documento, en el que se utiliza la siguiente formulación:

$$\begin{aligned}
D\% &= \frac{D_{t-1} \cdot [VU_{t-1} \cdot (Ku_t - g) - D_{t-1} \cdot (Kd_t - g)]}{VU_{t-1}^2 \cdot (Ku_t - g) - VU_{t-1} \cdot D_{t-1} \cdot [Kd_t \cdot (1 - T) - g] - D_{t-1}^2 \cdot Kd_t \cdot T} \\
D\% \cdot \{VU_{t-1}^2 \cdot (Ku_t - g) - VU_{t-1} \cdot D_{t-1} \cdot [Kd_t \cdot (1 - T) - g] - D_{t-1}^2 \cdot Kd_t \cdot T\} \\
&= D_{t-1} \cdot [VU_{t-1} \cdot (Ku_t - g) - D_{t-1} \cdot (Kd_t - g)] \\
D_{t-1}^2 \cdot [D\% \cdot Kd_t \cdot T - (Kd_t - g)] + D_{t-1} \cdot \{VU_{t-1} \cdot (Ku_t - g) + VU_{t-1} \cdot D\% \cdot [Kd_t \cdot (1 - T) - g]\} \\
&- VU_{t-1}^2 \cdot D\% \cdot (Ku_t - g) = 0 \\
D_{t-1}^2 \cdot [D\% \cdot Kd_t \cdot T - (Kd_t - g)] + D_{t-1} \cdot VU_{t-1} \cdot [Ku_t - g + D\% \cdot Kd_t \cdot (1 - T) - D\% \cdot g] \\
&- VU_{t-1}^2 \cdot D\% \cdot (Ku_t - g) = 0 \\
D_{t-1}^2 \cdot \frac{[D\% \cdot Kd_t \cdot T - (Kd_t - g)]}{VU_{t-1}} + D_{t-1} \cdot [Ku_t - g \cdot (1 + D\%) + D\% \cdot Kd_t \cdot (1 - T)] - VU_{t-1} \cdot D\% \cdot (Ku_t - g) \\
&= 0 \tag{B47}
\end{aligned}$$

Equation (B47) has a quadratic form with D_{t-1} como the unknown variable y, thus, can be solved by means of the general formula

La ecuación (B47) tiene una forma cuadrática con D_{t-1} de como la variable desconocida, por lo tanto, pueden ser resuelta por medio de la fórmula general

$$D_{t-1} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4 \cdot A \cdot C}}{2 \cdot A} \tag{A23}$$

with the values for A, B y C presented next:

con los valores para A, B y C se presentan a continuación:

$$A = \frac{[D\% \cdot Kd_t \cdot T - (Kd_t - g)]}{VU_{t-1}} \tag{B48}$$

$$B = [Ku_t - g \cdot (1 + D\%) + D\% \cdot Kd_t \cdot (1 - T)] \tag{B49}$$

$$C = -VU_{t-1} \cdot D\% \cdot (Ku_t - g) \tag{B50}$$

La expresión completa que resulta para D_{t-1} no se muestra en este documento debido a consideraciones de longitud, pero su aplicación numérica es muy sencilla.